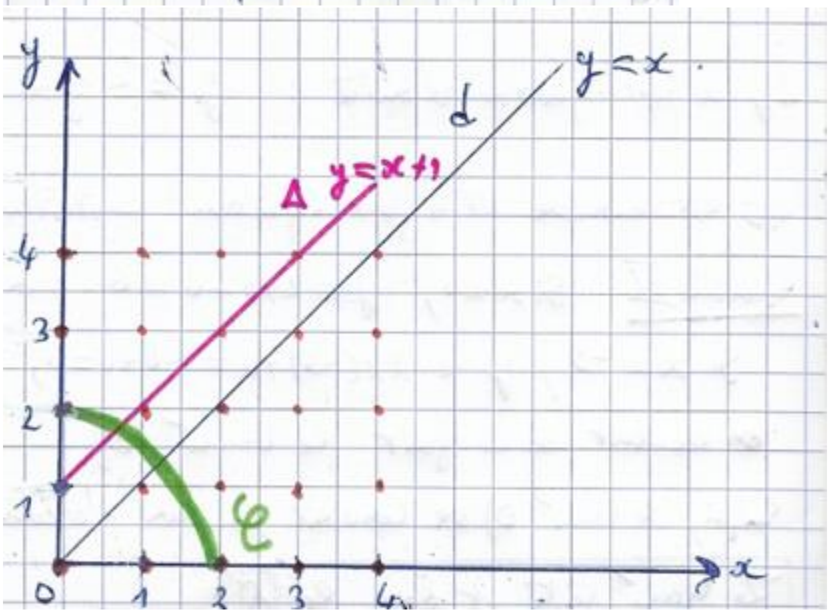
Exercice I

1)

$y \backslash x$	0	1	2	3	4
0	(0;0)	(1;0)	(2;0)	(3;0)	(4;0)
1	(0;1)	(1;1)	(2;1)	(3;1)	(4;1)
2	(0;2)	(1;2)	(2;2)	(3;2)	(4;2)
3	(0;3)	(1;3)	(2;3)	(3;3)	(4;3)
4	(0;4)	(1;4)	(2;4)	(3;4)	(4;4)



2a) d contient 5 points à coordonnées entières comprises entre 0 et 4 inclus.

Donc $\boxed{P(A)} = \dfrac{\text{nb d'issues favorables}}{\text{nb total d'issues}} = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5} = \boxed{0{,}2}$

le tableau précédent fait apparaître 25 couples deux à deux distincts !

2b) Δ a pour équation : $y = x+1$.

(0;1) ; (1;2) ; (2;3) ; (3;4) sont les seuls points de Δ dont abscisse et ordonnée sont comprises entre 0 et 4 inclus ; il y a donc 4 points favorables à la réalisation de l'événement B.

Donc $\boxed{P(B)} = \dfrac{4}{25} = \boxed{0{,}16}$

2c) Seuls les points (0;2) et (2;0) sont sur 𝒞 avec une abscisse et ordonnée comprise entre 0 et 4. Donc $\boxed{P(C)} = \dfrac{2}{25} = \boxed{0{,}08}$

Exercice II

d_1 a pour équation réduite : $y = 1x + 2$ c'est à dire : $y = x + 2$

d_2 a pour équation réduite : $y = 0x - 2$ c'est à dire : $y = -2$.

d_3 a pour équation réduite : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$: Ici il faudrait s'assurer que l'ordonnée à l'origine p est bien égale à $\frac{3}{2}$ par le calcul, car d_3 rencontre l'axe des ordonnées en un nombre non entier.

d_4 a pour équation réduite : $y = -\frac{1}{3}x$

d_5 est verticale et a pour équation : $x = 4$

Exercice III

L'ordonnée à l'origine est égale à 6 : on est donc dans le cas B ou bien E.

Le coefficient directeur est positif, donc la bonne réponse est la E.

Exercice IV

Déf : aire figure 1 = 8 x 8 = 64

aire figure 2 = 5 x 13 = 65

Paradoxe : les aires des deux figures ne sont pas égales, alors qu'elles sont composées des mêmes sous-figures A, B, C et D

Si on calcule l'aire des triangles et des trapèzes dans la figure 2, on obtient 64 et non 65

triangle A aire = 12

triangle B aire = 12 $\quad 12 \times 2 + 20 \times 2 = 64$

trapèze C aire = 20

trapèze D aire = 20

Pour comprendre il faut agrandir la figure 2, on peut voir qu'il existe un espace entre les triangles et les trapèzes, il n'est pas visible dans l'énoncé car il est très petit.

Démonstration

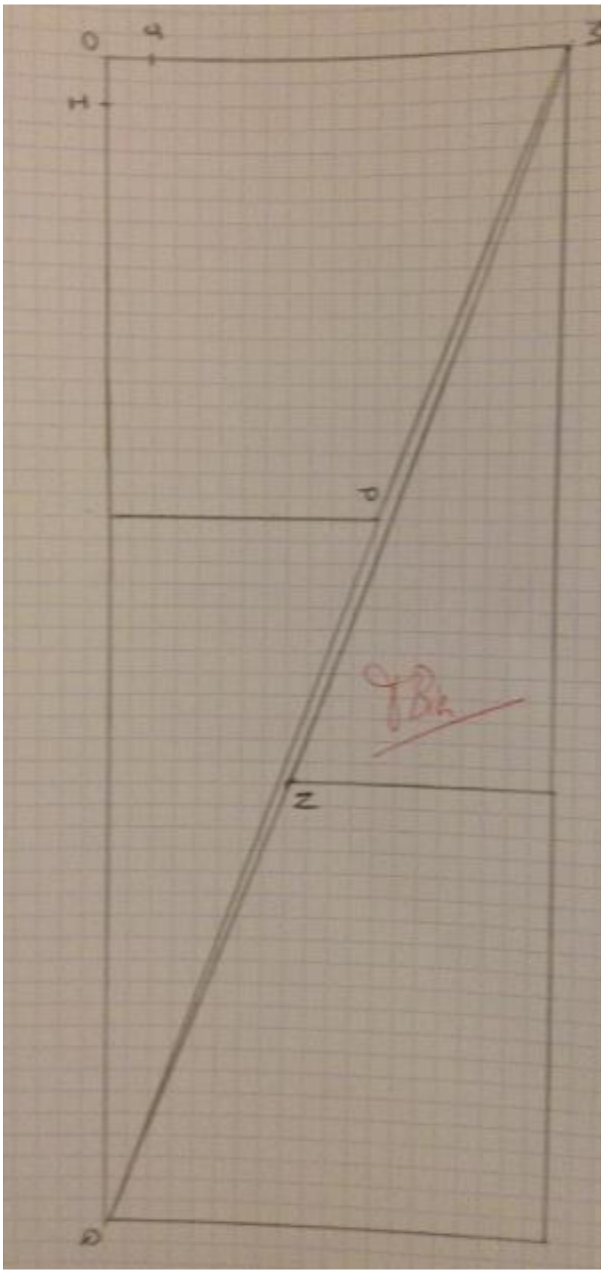
On se place dans un repère (O, I, J)

$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M \,;\, y_N - y_M)$

$= (-16 - 0 \,;\, 4 - 10)$

$= (-16 \,;\, -6)$

Re



$\overrightarrow{MQ} = (x_Q - x_M \,;\, y_Q - y_M)$
$= (26 - 0 \,;\, 0 - 10)$
$= (26 \,;\, -10)$

16	26
−6	−10

$(-6) \times 26 = -156$
$16 \times (-10) = -160$

$(-156) \neq (-160)$

Ce n'est donc pas un tableau de proportionalité

$\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{MN}$ ne sont pas proportionels et donc pas colinéaires.

Les point M, Q, N ne sont donc pas alignés

Cela explique l'espace entre les figures A, B, C et D.

Il ne s'agit donc pas d'un paradoxe mais d'un effet de vue !

Exercice V

Méthode de substitution

on intervertit L1 et L2

Exercice I

a) $\begin{cases} 3x+y=15 \\ 5x-4y=8 \end{cases} \iff \begin{cases} y=15-3x \\ 5x-4(15-3x)=8 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x-4(15-3x)=8 \\ y=15-3x \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 5x-4\times 15+4\times 3x=8 \\ y=15-3x \end{cases} \iff \begin{cases} 17x=8+60=68 \\ y=15-3x \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{68}{17}=4 \\ y=15-3\times 4=15-12=3 \end{cases}$

$\boxed{\mathcal{S}=\{(4;3)\}}$. Rq : dans la résolution du système, il faut conserver deux lignes au système tout au long des étapes.

b) $\begin{cases} 9x+8y=-60 \ (L_1) \\ 12x-7y=450 \ (L_2) \end{cases}$ Ici, aucun des coefficients des x et y ne vaut 1 ou −1, donc on va procéder par la méthode de combinaison.

Nous allons "éliminer" les y : 56 est un multiple commun à 8 et 7 : $8\times 7=56$.

donc on multiplie par 7 (L_1) et par 8 (L_2) :

$\begin{cases} 9x+8y=-60 \\ 12x-7y=450 \end{cases} \iff \begin{cases} 7(9x+8y)=7\times(-60) \\ 8(12x-7y)=8\times 450 \end{cases} \iff \begin{cases} 63x+56y=-420 \\ 96x-56y=3600 \end{cases}$

On remplace enfin la nouvelle ligne 2 du dernier système obtenu par $(L_1)+(L_2)$: $56y+(-56y)=0$!

$\iff \begin{cases} 63x+56y=-420 \\ (63x+56y)+(96x-56y)=-420+3600 \end{cases} \iff \begin{cases} 63x+56y=-420 \\ 159x=3180 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=\frac{3180}{159}=20 \\ 63\times 20+56y=-420 \end{cases} \iff \begin{cases} x=20 \\ 56y=-420-1260=-1680 \end{cases} \iff \begin{cases} x=20 \\ y=\frac{-1680}{56}=-30 \end{cases}$

$\boxed{\mathcal{S}=\{(20;-30)\}}$.

c) $\begin{cases} 8x-8y=4 \\ 1{,}15x-1{,}15y=2{,}3 \end{cases} \iff \begin{cases} 8(x-y)=4 \\ 1{,}15(x-y)=2{,}3 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y=\frac{4}{8}=0{,}5 \\ x-y=\frac{2{,}3}{1{,}15}=2 \end{cases}$

donc $0{,}5=2$: faux. (deux nombres égaux à un même troisième sont égaux).

Ainsi $\mathcal{S}=\emptyset$: le système n'a aucune solution !

Exercice VI

① Notons x la note obtenue à l'écrit, et y celle obtenue à l'oral :

On a : $\begin{cases} \dfrac{6x+4y}{6+4} = 9 \\ \dfrac{4x+6y}{4+6} = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{6x+4y}{10} = 9 \\ \dfrac{4x+6y}{10} = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x+4y = 90 \quad (\div 2) \\ 4x+6y = 100 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+2y = 45 \\ 2x+3y = 50 \end{cases}$

$\overset{L_1 \times 3}{\iff} \begin{cases} 9x+6y = 135 & L_1' \\ 4x+6y = 100 & L_2' \end{cases}$ ($L_2 \times 2$) $\iff \begin{cases} 9x+6y = 135 \\ L_1'-L_2' : 4x+6y-(9x+6y) = 100-135 \end{cases} \iff \begin{cases} 9x+6y = 135 \\ -5x = -35 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \dfrac{-35}{-5} = 7 \\ 9 \times 7 + 6y = 135 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 \\ y = \dfrac{135-63}{6} = \dfrac{72}{6} = 12 \end{cases} \quad . S = \{(7;12)\}$

Julie a eu 7 à l'écrit et 12 à l'oral.

② Soit x la longueur du rectangle initial, et y sa largeur.

Augmenter de 20 % un nombre revient à le multiplier par 1,2

Diminuer de 20 % un nombre revient à le multiplier par 0,8.

Donc : $\begin{cases} 2(x+y) = 20 \\ 2(1{,}2x + 0{,}8y) = 20 \times 1{,}1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y = 10 \\ 1{,}2x + 0{,}8y = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 10-x \\ 1{,}2x + 0{,}8(10-x) = 11 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = 10-x \\ 1{,}2x + 8 - 0{,}8x = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 10-x \\ 0{,}4x = 11-8 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 10-x \\ x = \dfrac{3}{0{,}4} = 7{,}5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7{,}5 \\ y = 10-7{,}5 = 2{,}5. \end{cases}$

$S = \{(7{,}5 ; 2{,}5)\}$.

Ce rectangle a pour dimensions initiales 7,5 cm en longueur et 2,5 cm en largeur.

3)

Soit x la masse molaire du Carbone et y celle de l'hydrogène :

$C_{12}H_{22}O_{11}$ a pour masse molaire $342 g.mol^{-1}$, donc : $12x + 22y + 11\times 16 = 342$

$$12x + 22y = 342 - 11\times 16 = 342 - 176$$

Vu que tous les coefficients sont pairs :

$$\div 2 \quad 12x + 22y = 166 \quad \div 2$$

$$6x + 11y = 83$$

$C_4H_7N_3O$ a pour masse molaire $113 g.mol^{-1}$, donc : $4x + 7y + 3\times 14 + 16 = 113$

$$4x + 7y = 113 - 3\times 14 - 16 = 113 - 42 - 16 = 55$$

D'où le système : $\begin{cases} 6x + 11y = 83 \\ 4x + 7y = 55 \end{cases}$ que l'on résout par méthode de combinaison :

On va éliminer les x : 12 est multiple commun de 6 et 4, $12 = 6\times 2$ et $12 = 4\times 3$, donc on multiplie la ligne 1 par 2 et la ligne 2 par 3 :

$$\begin{cases} 6x + 11y = 83 \\ 4x + 7y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(6x + 11y) = 2\times 83 \\ (4x + 7y) = \times 55 \end{cases} \overset{\text{on développe}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 12x + 22y = 166 & (L_1) \\ 12x + 21y = 165 & (L_2) \end{cases}$$

On remplace enfin (L_1) par $(L_1) - (L_2)$: $\begin{cases} (12x + 22y) - (12x + 21y) = 166 - 165 \\ 12x + 21y = 165 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 12x + 21\times 1 = 165 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x = 165 - 21 = 144 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{144}{12} = 12 \\ y = 1. \end{cases}$$

$\boxed{S = \{(12 ; 1)\}}$: la masse molaire moléculaire du carbone est égale à $12 g.mol^{-1}$ et celle de l'hydrogène à $1 g.mol^{-1}$.

Exercice VII

1) *On a, pour tout réel x, f(x) = ax+b. On doit trouver la valeur de a et b sachant que f(2)=0 et f(3)=6.*

On traduit ces données par le système suivant : $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 3a + b = 6 \end{cases}$ *qui se résout instantanément (L2 – L1) et donne :*

a = 6 et b = -12. S={(6 ;-12)}.

Donc f(x) = 6x – 12.

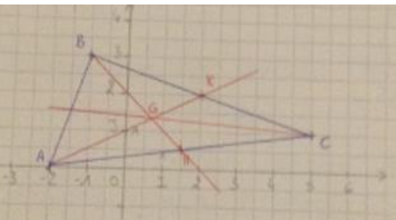
2) Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur, ici la droite d'équation y = x – 2023 a pour coefficient directeur m =1.

Donc en notant (d) la parallèle à cette dernière droite passant par C(2021 ;2022), (d) a pour équation réduite :

y = x + p.

C(2021 ;2022) appartient à (d) équivaut à dire que : 2022 = 2021 + p, donc p = 1 et par suite (d) a pour équation réduite : y = x+1.

Exercice VIII



On construit les médianes.

Soit le point $K(x\,;y)$ = milieu de $[BC]$

$x_K = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et $y_K = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Donc $\boxed{K(2\,;2)}$

Soit le point $H(x\,;y)$ = milieu de $[AC]$:

$x_H = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ et $y_H = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Donc $\boxed{H(1{,}5\,;0{,}5)}$

$A \in \mathcal{C}_f$ et $f(-2) = 0$ f est une fonction affine de la forme $y = ax + b$. On sait que $K \in \mathcal{C}_f$

$\boxed{a} = \frac{y_K - y_A}{x_K - x_A} = \frac{2-0}{2-(-2)} = \frac{2}{4} = \boxed{0{,}5}$ donc $y = 0{,}5x + b$.

$A(-2\,;0) \in \mathcal{C}_f$, donc on remplace :

$0 = 0{,}5 \times (-2) + b$

$0 = -1 + b$

$\boxed{b} = 0-(-1) = \boxed{1}$ donc $\mathcal{C}_f$ a pour équation $\boxed{y = 0{,}5x + 1}$

$B \in \mathcal{C}_g$ et $g(-1) = 3$, g est une fonction affine de la forme $y = ax + b$. On sait que $H \in \mathcal{C}_g$.

$\boxed{a} = \frac{y_H - y_B}{x_H - x_B} = \frac{0{,}5-3}{1{,}5-(-1)} = \frac{-2{,}5}{2{,}5} = \boxed{-1}$ donc $y = -1x + b$

On sait que $B(-1\,;3) \in \mathcal{C}_g$, donc on remplace :

$3 = -1 \times (-1) + b$

$3 = 1 + b$

$\boxed{b} = 3 - 1 = \boxed{2}$ donc $\mathcal{C}_g$ a pour équation : $\boxed{y = -1x + 2}$

G est le point d'intersection des médianes issues des points A et B

Trouver les coordonnées de G revient à résoudre le système

$$\begin{cases} y = 0{,}5x + 1 \\ y = -1x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0{,}5x + 1 \\ 0{,}5x + 1 = -1x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0{,}5x + 1 \\ 1{,}5x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0{,}5x + 1 \\ x = \frac{1}{1{,}5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{1{,}5} \\ y = 0{,}5 \times \left(\frac{1}{1{,}5}\right) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{1{,}5} = \frac{4}{3} \end{cases} \quad \mathcal{S} = (x\,;y) = \boxed{\left\{\left(\frac{1}{1{,}5}\,;\frac{2}{1{,}5}\right)\right\}}$$

Les médianes issues de A et B se coupent en le point $G\left(\frac{1}{1{,}5}\,;\frac{2}{1{,}5}\right)$

Soit G(2/3 ; 4/3).

On nomme $\mathcal{R}$ la droite passant par $C(5,1)$.

Le point $G\left(\frac{1}{1,5};\frac{2}{1,5}\right) \in \mathcal{R}$ SSI $y = h(x) = ax + b$ SSI $\frac{2}{1,5} = a \times \frac{1}{1,5} + b$

h est une fonction affine d'équation : $y = ax + b$

$\boxed{a} = \frac{y_G - y_C}{x_G - x_C} = \frac{\left(\frac{2}{1,5}\right) - 1}{\left(\frac{1}{1,5}\right) - 5} = \frac{\frac{0,5}{1,5}}{\frac{-6,5}{1,5}} = \frac{0,5}{1,5} \times \frac{1,5}{-6,5} = \boxed{\frac{0,75}{-9,75}}$ donc $y = \frac{0,75}{-9,75} \times x + b$.

simplifier

On sait que $C(5,1) \in \mathcal{R}$, donc on remplace :

$1 = \frac{0,75}{-9,75} \times 5 + b$

$1 = \frac{-5}{13} + b$

$\boxed{b} = 1 - \left(\frac{-5}{13}\right) = \frac{18}{13} = \boxed{\frac{13,5}{9,75}}$

donc la ~~fonction~~ droite h a pour équation :

$\boxed{y = \frac{0,75}{-9,75} \times x + \frac{13,5}{9,75}}$

On vérifie maintenant si $G\left(\frac{1}{1,5};\frac{2}{1,5}\right) \in \mathcal{R}$.

$\frac{0,75}{-9,75} \times \frac{1}{1,5} + \frac{13,5}{9,75} = \frac{4}{3} = \frac{2}{1,5}$

$\boxed{\frac{2}{1,5} = \frac{2}{1,5}}$, donc $G\left(\frac{1}{1,5};\frac{2}{1,5}\right) \in \mathcal{R}$, donc à la médiane issue de $C(5,1)$.

Exercice IX

(E) : $(x+y)^3 = x^3 + y^3$

a) Non : Pour $x = 1$ et $y = 1$ par exemple, $(x+y)^3 = (1+1)^3 = 2^3 = 8$ et $1^3 + 1^3 = 1 + 1 = 2$

$(8 \neq 2)$.

b) Non : Pour $x = y = 0$, on a bien : $(0+0)^3 = 0^3 = 0$ et $0^3 + 0^3 = 0$, donc E) est vérifiée lorsque par exemple $x = y = 0$!

c) On cherche $M(x;y)$ tel que : $(x+y)^3 = x^3 + y^3$.

Or, $(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = (x+y)(x^2 + 2xy + y^2) = x^3 + 2x^2y + xy^2 + yx^2 + 2xy^2 + y^3$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

$M(x;y)$ est tel que : $(x+y)^3 = x^3 + y^3$ (ssi) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3$.

Ce qui équivaut à : $3x^2y + 3xy^2 = 0$

c'est-à-dire : $3xy(x+y) = 0 \iff \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ y = 0 \\ \text{ou } x + y = 0 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ y = 0 \\ \text{ou} \\ y = -x \end{array}\right.$

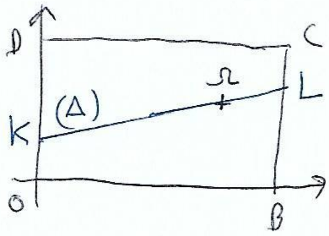
Les solutions de E) sont donc formées de : l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = -x$, la bissectrice ...

Le tracé est évident : il faut surligner en couleur l'axe des abscisses, celui des ordonnées et la droite d'équation : y = -x.

Exercice X

Tout d'abord, la droite passe par le centre $\Omega(75;30)$ du cercle, donc elle le partage en deux demis disques de même aire, indépendamment de sa pente.

On cherche donc la pente m de la droite (Δ) passant par $\Omega(75;30)$ et qui divise l'aire du rectangle ABCD en deux parties de même aire, où $O(0;0)$; $B(100;0)$; $C(100;50)$; $D(0;50)$.



Soit (Δ) cette droite : elle a pour équation réduite : $y = mx + p$

$\Omega(75;30) \in (\Delta) \iff 30 = 75m + p \iff p = 30 - 75m$.

Δ a pour équation : $y = mx + 30 - 75m$

Δ rencontre l'axe des ordonnées (lorsque $x = 0$) en un point $K(0\,;\,y_K)$

avec : $y_K = m \times 0 + 30 - 75m$ donc en $K(0\,;\,-75m+30)$.

Δ rencontre la droite verticale d'équation $x = 100$ en le point $L(100\,;\,y_L)$ et

$y_L = 100m + 30 - 75m = 25m + 30$: $L(100\,;\,25m+30)$.

Les deux trapèzes OKLB et CDKL ont même aire si et seulement si $OK = CL$ (car OBCD est un rectangle, et ces deux trapèzes ont même hauteur). (Soit par alignement, $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{LC}$

$\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix} 0 \\ -75m+30 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LC}\begin{pmatrix} 0 \\ 50-(25m+30) = -25m+20 \end{pmatrix}$

Par suite : $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{LC} \iff -75m+30 = -25m+20 \iff 30-20 = 75m-25m$

$\iff 50m = 10 \iff \boxed{m = \frac{1}{5}}$

Réponse A : La pente de la droite cherchée qui partage la zone en deux aires égales vaut $m = \frac{1}{5}$.