Exercice I

$f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-3x}}$.

1) Pour tout réel x, $e^{-3x} > 0$, donc $1+e^{-3x} > 1$ et en particulier, $1+e^{-3x} \neq 0$: le dénominateur ne s'annule jamais, donc $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.

$A(0\,;\frac{1}{2})$: $\boxed{f(0)} = \dfrac{1}{1+e^{0}} = \dfrac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2} = y_A}$, donc $\boxed{A(0\,;\frac{1}{2}) \in \mathcal{C}_f}$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-3x}} = \dfrac{1}{v(x)}$ où $\begin{cases} v(x) = 1+e^{-3x} \\ v'(x) = 0+(-3)e^{-3x} = -3e^{-3x}. \end{cases}$

Donc $\boxed{f'(x)} = -\dfrac{v'(x)}{v^2(x)} = \boxed{\dfrac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}}$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-3x} > 0$, $3 > 0$ et $(1+e^{-3x})^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Donnons l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A, puis vérifions que B appartient à cette tangente notée T_A.

T_A a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec : $\begin{cases} f'(0) \overset{(2)}{=} \dfrac{3e^{0}}{(1+e^{0})^2} = \dfrac{3}{4} \\ f(0) = y_A = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\boxed{y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}}$

Soit $B(1\,;\frac{5}{4})$: $\frac{3}{4}x_B + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\times 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} = y_B$.

Donc $\boxed{B(1\,;\frac{5}{4}) \in T_A}$, et par suite, vu que T_A est une droite passant par A, on a :

$\boxed{T_A = (AB)}$.

Exercice II

$t \geq 0$ et $f(t) = e^{3} - e^{-0,5t^2+t+2}$

Étudions le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$:

$f(t) = e^{3} - e^{u(t)}$ où $\begin{cases} u(t) = -0,5t^2+t+2 \\ u'(t) = -t+1 \end{cases}$

$f'(t) = 0 - u'(t)e^{u(t)} = -(-t+1)e^{-0,5t^2+t+2}$

$f'(t) = (t-1)e^{-0,5t^2+t+2}$

Or, pour tout réel $t \geq 0$, $e^{-0,5t^2+t+2} > 0$, donc $f'(t)$ a le même signe que $t-1$:

$f'(t) \geq 0 \iff t-1 \geq 0 \iff t \geq 1.$

D'où :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	e^3-e^2	$\searrow$	$e^3-e^{2,5}$	$\nearrow$	

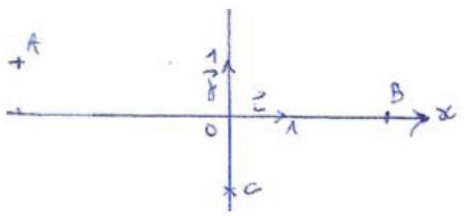
L'affirmation ① est donc fausse : f n'est pas croissante sur $[0\,;+\infty[$!

$f(0) = e^3 - e^2$ milliers de bactéries, donc $f(0) \approx 12696$ bactéries : l'affirmation ② est donc également fausse !

En fait, pour tout $t \geq 0$, $f(t) < e^3$ car $-e^{-0,5t^2+t+2} > 0$.
et $e^3 \times 1000 \approx 20\,085$ qui est inférieur à 21000 !

Autre justification pour prouver que l'affirmation ② est fausse !

Exercice III



C appartient à l'axe des ordonnées, donc $C(0\,;y)$ avec $y \in \mathbb{R}$.

ABC est rectangle en A $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux $\iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-4)=7 \\ 0-1=-1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-(-4)=4 \\ y-1 \end{pmatrix}$

ABC est rectangle en A $\iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \overset{\text{R.O.N}}{\iff} xx'+yy'=0 \iff 7\times 4 + (-1)\times(y-1) = 0$

ABC est rectangle en A $\iff 28 - y + 1 = 0 \iff y = 29.$

donc $\boxed{C(0\,;29)}$

On calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$ avec les coordonnées de ces deux vecteurs on trouve sans peine : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = -7\times5+(-1)\times(-1) = -34$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = AB\times AI\times\cos(\widehat{IAB})$ avec $AB = \sqrt{(-7)^2+(-1)^2} = \sqrt{50}$ et $AI = \sqrt{5^2+(-1)^2} \doteq \sqrt{26}$

De là on obtient : $-34 = \sqrt{50}\times\sqrt{26}\times\cos(\widehat{IAB})$ donc $\widehat{IAB} = \arccos(-34/\sqrt{50}\times\sqrt{26}\,) \approx 3°$.

Exercice IV

a) $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0}$ car ABC est rectangle en A, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}}_{0 \text{ car } (AB)\perp(BD)} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ (mon codage sur la figure, dommage).

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AB\times DC\times\cos(\pi)$ car $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC})=\pi$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5^2 + 5\times4\times(-1) = 25-20$.

$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5.}$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 3\times3\times\cos(40)$ car $\widehat{BAC} = 180-2\times70 = 40°$.

$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \approx 6{,}89}$

d) On est ici dans un RON $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$C(x;0)$ et $C\in(AC)$, donc $0=-2x+6$, donc $2x=6$ et $x=3$: $C(3;0)$.

De même, $B(-3;0)$.

$A(x;y)\in(AC)\cap(AB) \iff \begin{cases} y=x+3 \\ \text{et } y=-2x+6 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x+3 \\ x+3=-2x+6 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x+3 \\ 3x=3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=4. \end{cases}$

Donc $A(1;4)$.

Par suite, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-1=-4\\0-4=-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-1=2\\0-4=-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx'+yy' = -4\times2+(-4)\times(-4)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -8+16 = 8$.

e) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$.

Donc $0{,}5(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = 0{,}5(\cancel{\|\vec{u}\|^2} + 2\vec{u}.\vec{v} + \cancel{\|\vec{v}\|^2} - \cancel{\|\vec{u}\|^2} - \cancel{\|\vec{v}\|^2})$

$\boxed{0{,}5(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = 0{,}5\times2\,\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}}$

On applique cette relation avec : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$:

e) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}\left[\|\underbrace{\vec{AB}+\vec{AC}}_{=\vec{AD} \text{ car ABCD pgm}}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AC}\|^2\right]$.

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{AD}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AC}\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[5^2-4^2-2^2\right] = \frac{1}{2}(25-16-4)$

$\boxed{\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{5}{2}.}$

2) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

$\vec{v} = 5\vec{i} + \vec{j}$, donc $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

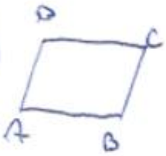
Or $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un R.O.N, $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy' = 2\times5 + (-3)\times1 = 10-3 = 7$.

Exercice V

2a) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 \quad (L_1)$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 \quad (L_2)$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 \underset{(L_1)+(L_2)}{=} 2\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$.

2b) 

ABCD est un pgm. Posons $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AD}$.

$\vec{u}+\vec{v} = \vec{AC}$ et $\vec{u}-\vec{v} = \vec{AB}-\vec{AD} = \vec{AB}+\vec{DA} = \vec{DA}+\vec{AB} = \vec{DB}$

Grâce à 2a), $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$.

Donc : $\|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{BD}\|^2 = 2\left(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AD}\|^2\right)$.

D'où $AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + AD^2\right)$. Or $\vec{AD} = \vec{BC}$ car pgm ABCD donc $\|\vec{AD}\| = \|\vec{BC}\|$ i.e. $AD = BC$

D'où $\boxed{AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + BC^2\right).}$ (*)

c) On applique (*) avec : AB = 6 ; BC= 4 et AC = 8 :

$8^2 + BD^2 = 2(6^2+4^2)$, donc $BD^2 = 2(6^2+4^2) - 8^2 = 2\times(36+16) - 64 = 2\times52 - 64 = 104 - 64 = 40$.

Donc comme BD est positive, on a : $BD = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

Exercice VI

On se place dans le R.O.N $(A ; \vec{AB} ; \vec{AD})$ par exemple.

Soit $a = BE$; $a > 0$ (a désigne la longueur des côtés du carré BEFG).

On a : $A(0;0)$; $B(1;0)$; $C(1;1)$; $D(0;1)$; $E(1+a;0)$; $F(1+a;a)$; $G(1;a)$.

donc $\vec{AG}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{CE}\begin{pmatrix}1+a-1=a\\0-1=-1\end{pmatrix}$.

et $\vec{AG}\cdot\vec{CE} = 1\times a + a\times(-1) = a-a = 0$.

Par suite, $\vec{AG}$ et $\vec{CE}$ sont orthogonaux, et donc (AG) et (CE) sont perpendiculaires !

Exercice VII

1a) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AB}\cdot(\vec{AD}+\vec{DC}) = \underbrace{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}_{0 \text{ car } (AB)\perp(AD)} + \vec{AB}\cdot\vec{DC} = AB\times DC$ car $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ sont colinéaires de même sens.

Chasles

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (\vec{AC}+\vec{CB})\cdot\vec{AC} = \vec{AC}\cdot\vec{AC} + \underbrace{\vec{CB}\cdot\vec{AC}}_{0 \text{ car CBA est rectangle en C donc } \vec{CB}\perp\vec{AC}} = AC^2$

Chasles

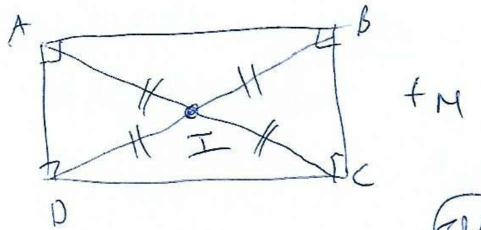
1b) De part les deux résultats obtenus en 1a) on a : $AC^2 = AB\times CD \; (= \vec{AB}\cdot\vec{AC})$.

2) Pour avoir le moins de paramètres possibles, on se place dans un repère orthonormé tel que : D(0 ; 0) ; A(0 ; 1) et C(a ; 0) où a >0. Enfin on appelle b l'abscisse de B : B(b ; 1) avec b >0.

Facilement, le calcul des coordonnées des vecteurs conduit sans peine à : $AC^2 = a^2 + 1$ et $AB\times CD = ab$.

Enfin, comme ACB est un triangle rectangle en C, le théorème de Pythagore donne : $b^2 = a^2 + 1 + (a - b)^2 + (-1)^2$, de sorte que : $2a^2 - 2ab + 2 = 0$, et donc $ab = a^2+1$, c'et à dire $AB\times CD = AC^2$.

Exercice VIII



IR n°1

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}.$$

$$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC}^2 = MI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC}$$

de même, on obtient : $MB^2 = MI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$

et $MD^2 = MI^2 + ID^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID}$.

donc $MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + IA^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}}_{=\vec{0}})$ car I = Milieu de [AC] ;

Or I est le milieu des diagonales et ABCD est un rectangle, donc $IA = IC$.

Donc $\boxed{MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + 2IA^2}$ (*)

de même : $MB^2 + MD^2 = 2MI^2 + IB^2 + ID^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\underbrace{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}}_{=\vec{0}})$ car I = Mil. [BD].

d'où $\boxed{MB^2 + MD^2 = 2MI^2 + 2IB^2}$ (**) car $IB = ID$.

Enfin, les diagonales d'un rectangle ont même milieu et même longueur : donc $IA = IB$;

(*) et (**) conduisent alors à : $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$. (***)

Application : Grâce à (***) et aux données, on a : $4^2 + 11^2 = 5^2 + MD^2$.

Donc : $MD^2 = 4^2 + 11^2 - 5^2 = 16 + 121 - 25 = 112$.

Or $MD > 0$, donc $\boxed{MD} = \sqrt{112} = \sqrt{16 \times 7} = \boxed{4\sqrt{7}}$ m.