Terminale Maths Groupe 2 **Corrigé du DM 11** **Février 2023**

Exercice I

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

1.
- $g(1) = 2 \times 0 - 1 \times 0 = 0$;
- $g(\mathrm{e}) = 2 \times (\mathrm{e}-1) - \mathrm{e} \times \ln \mathrm{e} = 2\mathrm{e} - 2 - \mathrm{e}\ln \mathrm{e} = \mathrm{e} - 2$.

2. On sait que $\lim\limits_{x \to +0} x \ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +0} g(x) = -2$.

3. g est une somme de produits de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = 2 \times 1 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = 2 - \ln x - 1 = 1 - \ln x$.
Étude du signe de la dérivée : $g'(x) = 1 - \ln x$:
- $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \ln \mathrm{e} > \ln x \iff \mathrm{e} > x$, donc g est croissante sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$;
- $1 - \ln x < 0 \iff 1 = \ln x \iff \ln \mathrm{e} = \ln x \iff \mathrm{e} = x$, donc g est décroissante sur l'intervalle $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$;
- $1 - \ln x = 0 \iff 1 < \ln x \iff \ln \mathrm{e} < \ln x \iff \mathrm{e} < x$, donc $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - 2$ est le maximum de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

D'où le tableau de variations de g :

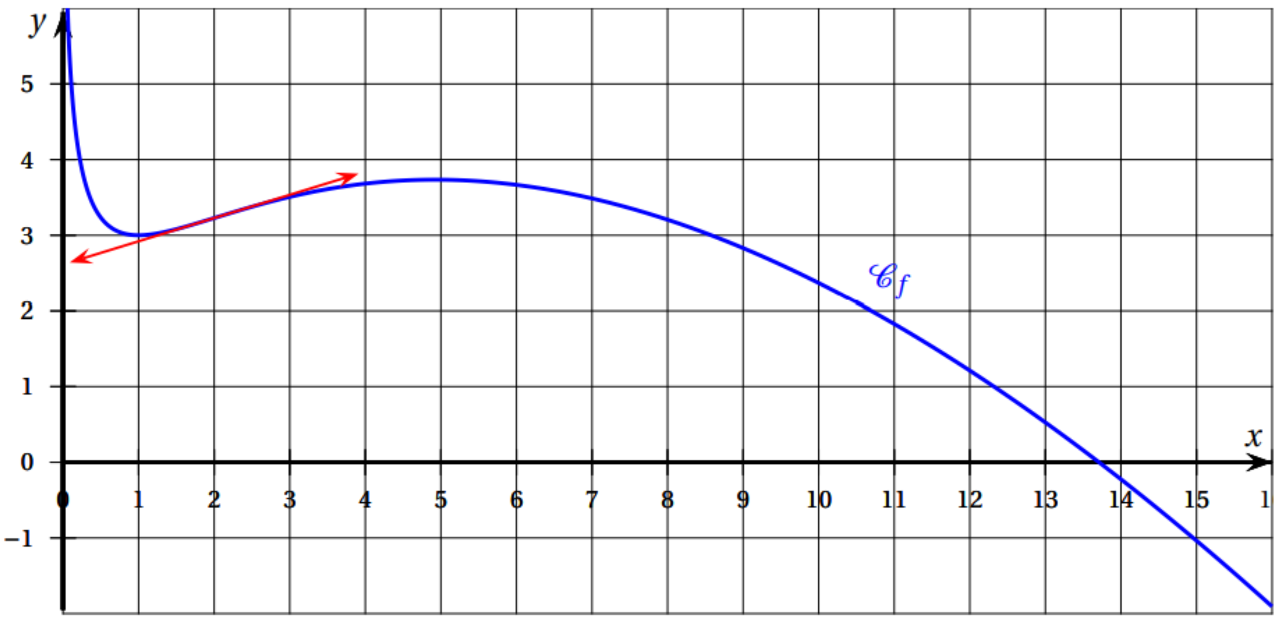
x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖ -2	↗	$\approx 0,718$	↘	$-\infty$

4.
- Sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$, la fonction g est dérivable, donc continue ; comme $-2 < 0 < \mathrm{e}$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique β de l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$, tel que $g(\beta) = 0$. Or de façon évidente $g(1) = 0$, donc $\beta = 1$;
- Sur l'intervalle $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$, la fonction g est dérivable, donc continue ; comme $0,718 > 0$, il existe un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$, avec $\alpha \in]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

On a $g(4,9) \approx 0,01$ et $g(5,0) \approx -0,05$, donc $4,9 < \alpha < 5,0$;
$g(4,92) \approx 0,0009$ et $g(4,93) \approx -0,005$, donc $4,92 < \alpha < 4,93$.

5. D'après la question précédente on peut dresser le tableau de signes de g sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	



1. On a : $f(x) = x\left[3 - \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right]$;

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[3 - \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right] = -\infty$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

1

2. a. Sur $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction f somme de produits de fonctions dérivables sur cet intervalle est dérivable et :

$f'(x) = 3 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} - 2 \times \dfrac{1}{x} = 3 - \ln x - 1 - \dfrac{1}{x} = 2 - \ln x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x - x\ln x - 2}{x} = \dfrac{(x-1) - x\ln x}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$.

b. Le résultat précédent montre que puisque $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $g(x)$ étudié à la question 5. de la partie A.

Donc $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$: f est croissante sur cet intervalle ;

$f'(x) < 0$ sur $]0\ ;\ 1[$ et sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$: f est décroissante sur ces deux intervalles : ($f(\alpha) \approx 3{,}73$)

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$\approx 3{,}73$	↘	$-\infty$

3. Comme $x^2 > 0$, pour $x > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $2 - x$:

- $2 - x > 0 \iff x < 2$ donc sur $[0; 2]$ la fonction f est convexe;
- $2 - x < 0 \iff x > 2$ donc sur $[2\,;\,+\infty]$ la fonction f est concave;
- $2 - x = 0 \iff x = 2$ donc le point de coordonnées $(2\,;\,f(2))$ est le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

$f(2) = 6 - 2\ln 2 - 2\ln 2 = 6 - 4\ln 2 \approx 3,23$. (voir la figure : la tangente au point d'abscisse 2 traverse la courbe)

Exercice II

$$f(x) = x^3\,\mathrm{e}^{x}.$$

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a.
- $u_1 = (-1)^3\,\mathrm{e}^{-1} = -\,\mathrm{e}^{-1} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx -0,368;$
- $u_2 = f(u_1) = \left(-\,\mathrm{e}^{-1}\right)^3\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}\right) = -\,\mathrm{e}^{-3} \times \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}\right) = -\,\mathrm{e}^{-3-\mathrm{e}^{-1}} \approx -0,034.$

b. On a `fonc(2)` $= u_2 \approx -0,034$.

2. **a.** En dérivant $f(x)$ comme un produit on obtient :
$f'(x)3x^2\,\mathrm{e}^{x} + x^3\,\mathrm{e}^{x} = x^2\,\mathrm{e}^{x}(3 + x)$.

b. ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f	0 ↘	$-27\,\mathrm{e}^{-3}$	↗ $+\infty$

Quel que soit le réel x, $x^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3+x$ qui s'annule pour $x=-3$, d'où les deux intervalles de variations ;

$3+x<0 \iff x<-3$: sur $]-\infty\,;\,-3[$, $f'(x)<0$: la fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\,;\,-3[$;

$3+x>0 \iff x>-3$: sur $]-3\,;\,+\infty[$, $f'(x)>0$: la fonction f est donc croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$;

$f(-3)=(-3)^3\times\mathrm{e}^{-3}=-27\,\mathrm{e}^{-3}=-\dfrac{27}{\mathrm{e}^{3}}\approx -1{,}344$ est le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$.

c. *Initialisation* : avec $u_0=-1$ et $u_1\approx -0{,}368$, on a bien : $-1\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 0$: l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $-1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 0$.

On a vu que sur l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$, donc a fortiori sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, la fonction est strictement croissante.

On a donc par croissance de f : $f(-1)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(0)$, ou encore :

$u_1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant f(0)$

et comme $u_1\approx -0{,}338$, $-1\leqslant u_1$ et $f(0)=0$, on a bien :

$-1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 0$.

La relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, $n\in\mathbb{N}$, il est encore vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a : $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 0$.

d. La question précédente montre que :

- la suite (u_n) est croissante ;
- la suite (u_n) est majorée par 0 ;

La suite (u_n) est donc convergente vers une limite ℓ, avec $\ell\leqslant 0$.

e. On résout dans $]-1\,;\,0[$, (car d'après la question précédente tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle) l'équation :

$f(x)=x \iff x^3\,\mathrm{e}^{x}=x \iff x^3\,\mathrm{e}^{x}-x=0 \iff x\left(x^2\,\mathrm{e}^{x}-1\right)=0 \iff x=0$, car on admet que l'équation $x^2\,\mathrm{e}^{x}-1=0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-1\,;\,0[$.

Conclusion $\ell=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

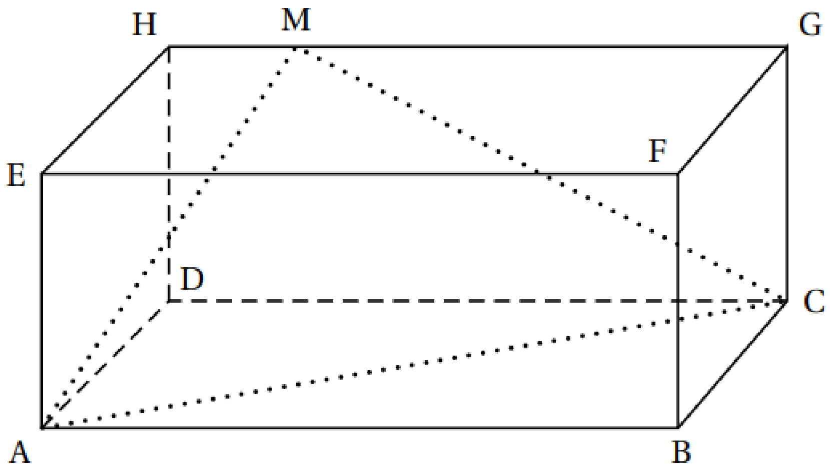
Exercice III

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que

AB = 5, AD = 3 et AE = 2.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées (5; 0; 0), (0; 3; 0) et (0; 0; 2).

Le repère est donc : $\left(A\,;\frac{1}{5}\overrightarrow{AB},\ \frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point H a pour coordonnées (0 ;3 ;2).
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point G a pour coordonnées (5 ;3 ;2).

   b. La droite (GH) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{HG}$ de coordonnées (5 ;0 ;0).
De plus, elle passe par le point G donc elle a pour représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5+5t \\ y &=& 3 \\ z &=& 2 \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle [0; 1].

   a. $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_M - 0 &=& 5k \\ y_M - 3 &=& 0 \\ z_M - 2 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_M &=& 5k \\ y_M &=& 3 \\ z_M &=& 2 \end{array}\right.$
Donc les coordonnées de M sont ($5k$; 3 ; 2).

   b. Les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont celles de M donc : ($5k$; 3 ; 2).
Les coordonnées de C sont (5 ;3 ;0), donc celles de $\overrightarrow{CM}$ sont ($5k-5$;$3-3$;$2-0$) soit ($5k-5$;0 ;2).
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM} = 5k\times(5k-5)+3\times 0+2\times 2 = 25k^2-25k+4$

   c. Le triangle AMC est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CM}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}$ ou encore $25k^2-25k+4=0$.
On résout cette équation. $\Delta = (-25)^2 - 4\times 25\times 4 = 225 = 15^2$
L'équation admet deux solutions $k' = \dfrac{25+15}{2\times 25} = \dfrac{40}{50} = \dfrac{4}{5}$ et $k'' = \dfrac{25-15}{2\times 25} = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$
Donc pour $k = \dfrac{1}{5}$ ou $k = \dfrac{4}{5}$, le triangle AMC est rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1; 3; 2)$.

On admet que le triangle AMC est rectangle en M.

3. On considère le point K de coordonnées $(1; 3; 0)$.

a. Le plan (ACD) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, donc il a pour équation cartésienne $z = 0$.

b. $z_K = 0$ donc le point K appartient au plan (ACD).

$\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $(0\,;0\,;-2)$, donc

- $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donc $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{AC}$.

On en déduit que $\overrightarrow{MK}$ est orthogonal au plan (ACD), et donc que K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).

c. Le volume du tétraèdre MACD est : $\dfrac{1}{3} \times$ Aire de ACD $\times$ MK.

$\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $(0\,;0\,;-2)$, donc $MK = 2$.

Le triangle ACD est rectangle en D donc a pour aire $\dfrac{AD \times DC}{2} = \dfrac{3 \times 5}{2} = \dfrac{15}{2}$.

Le volume du tétraèdre MACD est donc, en unités de volume : $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{15}{2} \times 2 = 5$.

4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).

Si on considère D comme sommet du tétraèdre MACD, la base est le triangle AMC, et la hauteur est DP.

Le triangle AMC est rectangle en M donc son aire est : $\dfrac{AM \times MC}{2}$.

$AM = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{14}$

$CM = \sqrt{(1-5)^2 + (3-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20}$

L'aire de AMC vaut : $\dfrac{\sqrt{14} \times \sqrt{20}}{2} = \sqrt{70}$.

Le tétraèdre MACD a donc pour volume : $\dfrac{1}{3} \times \sqrt{70} \times DP$ soit : $\dfrac{DP\sqrt{70}}{3}$.

On sait que ce volume vaut 5, donc : $\dfrac{DP\sqrt{70}}{3} = 5$ donc : $DP = \dfrac{15}{\sqrt{70}} \approx 1,8$.

Exercice IV

a). $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} x_d - x_e = 3+2,5 = 5,5 \\ y_d - y_e = 4-0,5 = 3,5 \\ z_d - z_e = 3+1 = 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_f - x_e = 2+2,5 = 4,5 \\ y_f - y_e = -1-0,5 = -1,5 \\ z_f - z_e = 5+1 = 6 \end{pmatrix}$

b). $\dfrac{x_{\overrightarrow{ED}}}{x_{\overrightarrow{EF}}} = \dfrac{5,5}{4,5} = \boxed{\dfrac{11}{9}}$ et $\dfrac{y_{\overrightarrow{ED}}}{y_{\overrightarrow{EF}}} = \dfrac{3,5}{-1,5} = \boxed{\dfrac{-21}{9}}$

donc : $\dfrac{x_{\overrightarrow{ED}}}{x_{\overrightarrow{EF}}} \neq \dfrac{y_{\overrightarrow{ED}}}{y_{\overrightarrow{EF}}}$ donc $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas colinéaires, par suite E, D et F ne sont pas alignés donc $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$ définissent un unique plan. Oui

c). $\vec{n}\begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\vec{n}.\overrightarrow{ED} = xx' + yy' + zz'$

$\boxed{\vec{n}.\overrightarrow{ED} = -9 \times 5,5 + 5 \times 3,5 + 8 \times 4 = 0}$

donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{ED}$.

Oui

$\vec{n} \cdot \vec{EF} = xx' + yy' + zz'$

$\vec{n} \cdot \vec{EF} = -9 \times 4,5 + 5 \times (-1,5) + 8 \times 6$

$\boxed{\vec{n} \cdot \vec{EF} = 0}$ Oui

donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{EF}$

Par suite, $\vec{n}$ est normal à un couple de vecteur qui constitue le plan (DEF)

donc $\vec{n}$ est normal à ce plan Oui

d). D'après la question c/ $\vec{n}$ est orthogonal au plan (DEF) donc

une ~~l'~~équation cartésienne de ce plan est : $-9x + 5y + 8z + d = 0$ Oui

$D(3;4;3) \in (DEF)$ donc : $-9 \times 3 + 5 \times 4 + 8 \times 3 + d = 0$

$-27 + 20 + 24 + d = 0$

$17 + d = 0$

$\boxed{d = -17}$

donc une ~~l'~~équation cartésienne du plan (DEF) est

$\boxed{-9x + 5y + 8z - 17 = 0}$ Oui

e). Soit (d) la droite passant par $E\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$ et dirigée par $\vec{n}\begin{pmatrix}-9\\5\\8\end{pmatrix}$

Voici une représentation paramétrique de (d) :

$\begin{cases} x = -\frac{5}{2} - 9t \\ y = \frac{1}{2} + 5t \\ z = -1 + 8t \end{cases}$ Oui avec $t \in \mathbb{R}$

f) H est donc le projeté de E sur la droite (DF).

$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}$, avec pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 5t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

de quelle droite parlez-vous ?

H appartenant à (DF), ses coordonnées vérifient donc les équations de la représentation paramétrique de (AB).

Soit $H(2-t\ ;\ -1-5t\ ;\ 5+2t)$ oui donc

$\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}2-t-(-2,5) = 4,5-t\\ -1-5t-0,5 = -1,5-5t\\ 5+2t-(-1) = 6+2t\end{pmatrix}$

Bien

$\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EH}$ orthogonaux donc :

$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EH} = 0$

oui

soit $-1(4,5-t)+(-5)(-1,5-5t)+2(6+2t)=0$

En résolvant cette équation on trouve t = -0,5, de sorte que H(2,5 ; 1,5 ; 4).

g) $\mathcal{A}$(DEF)= 0,5×DF×EH (Pensez à faire un dessin, on prend ici pour base DF et la hauteur relative est EH).

Avec grâce aux coordonnées de $\overrightarrow{DF}$ *on déduit que* $DF = \sqrt{(-1)^2+(-5)^2+2^2} = \sqrt{1+25+4} = \sqrt{30}$.

De même, $\overrightarrow{EH}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix}5\\1\\5\end{pmatrix}$, *donc* $EH = \sqrt{5^2+1^2+5^2} = \sqrt{51}$.

Par suite, $\mathcal{A}$(DEF) = $\frac{\sqrt{30}\times\sqrt{51}}{2} = \frac{3\sqrt{170}}{2}$ unités d'aire.

i). $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EF} = xx' + yy' + zz'$

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EF} = \frac{11}{2}\times\frac{9}{2} + \frac{7}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right) + 4\times 6$

$$\boxed{\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EF} = \frac{87}{2}}$$

$\|\overrightarrow{ED}\| = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 4^2}$ $\|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 6^2}$

$\boxed{\|\overrightarrow{ED}\| = \frac{3\sqrt{26}}{2} \text{ u.l}}$ $\boxed{\|\overrightarrow{EF}\| = \frac{3\sqrt{26}}{2} \text{ u.l.}}$

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EF} = \|\overrightarrow{ED}\| \times \|\overrightarrow{EF}\| \times \cos(\widehat{DEF})$

$\cos(\widehat{DEF}) = \frac{\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EF}}{\|\overrightarrow{ED}\|.\|\overrightarrow{EF}\|}$

$\cos(\widehat{DEF}) = \frac{87}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}\times 2}{3\sqrt{26}\times 3\sqrt{26}}$

$\cos(\widehat{DEF}) = \frac{29}{39}$

$$\boxed{\arccos\left(\frac{29}{39}\right) = 42°}$$

j) NON ! $\widehat{DEF}$ et $\widehat{DHF}$ n'ont pas la même mesure (180° pour $\widehat{DHF}$), cela suffit comme contre-exemple : en projetant orthogonalement sur la droite (DF) par exemple, les mesures des angles ne sont pas préservées !

Exercice V

1. a.

Solution : P(2 ; 0 ; 0) , Q(0 ; 0 ; 2) et $\Omega(3;3;3)$

b.

Solution : R(0 ; 4 ; 6) donc $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR) si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

$$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PR}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{QR}=0\end{cases} \iff \begin{cases}-2+4b+6c=0\\ 4b+4c=0\end{cases} \iff \begin{cases}2b=-2\\ c=-b\end{cases} \iff \begin{cases}b=-1\\ c=1\end{cases}$$

Finalement $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR)

c.

Solution :
$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR) donc (PQR) : $x-y+z+d=0$.
Or $P(2;0;0)\in(PQR)$ donc $x_P-y_P+z_P+d=0$.
Finalement (PQR) : $x-y+z-2=0$.

2. a.

Solution : Δ est perpendiculaire au plan (PQR) donc $\overrightarrow{n}$ est directeur de Δ, de plus $\Omega(3;3;3)\in\Delta$.

On en déduit : Δ : $\begin{cases}x=3+t\\ y=3-t\\ z=3+t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$.

b.

Solution : Si on pose $t=-\dfrac{1}{3}$ dans la représentation précédente on obtient les coordonnées de I donc $I\in\Delta$.
De plus $x_I-y_I+z_I-2=\dfrac{8}{3}-\dfrac{10}{3}+\dfrac{8}{3}-2=0$ donc $I\in$ (PQR).
Finalement Δ coupe le plan (PQR) au point $I\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{10}{3};\dfrac{8}{3}\right)$.

c.

Solution :
$\Omega I=\sqrt{(x_I-x_\Omega)^2+\left(y_I-y_\Omega\right)^2+(z_I-z_\Omega)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3. a.

Solution : $x_J-y_J+z_J-2=6-4-2=0$ donc $J\in$ (PQR).

b.

Solution :
$\overrightarrow{JK}(0;2;2)$ or $\overrightarrow{QR}(0;4;4)$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires.
On en déduit que (JK) et (QR) sont parallèles.

Exercice VI

1. **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$; $7\times\dfrac{2}{7}=2$ et $-4\times\dfrac{2}{7}\neq 3$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

   Les points A, B et C ne sont pas alignés donc ils définissent bien un plan dont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs.

   b. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AB}=5\times 7+16\times(-4)+29\times 1=35-64+29=0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AB}$.
   $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AC}=5\times 2+16\times 3+29\times(-2)=10+48-58=0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AC}$.
   Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

   Si M a pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, alors $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x+1\,;\,y+1\,;\,z)$.
   $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{n}\iff\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{n}=0\iff 5(x+1)+16(y+1)+29z=0\iff 5x+16y+29z+21=0$
   Le plan (ABC) a pour équation $5x+16y+29z+21=0$.

2. **a.** $AB^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = 7^2 + (-4)^2 + 1^2 = 49 + 16 + 1 = 66$

$AC^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = 2^2 + 3^2 + (-2)^2 = 4 + 9 + 4 = 17$

$BC^2 = (1-6)^2 + (2+5)^2 + (-2-1)^2 = 25 + 49 + 9 = 83$

$66 + 17 = 83$ ce qui équivaut à $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

b. Le triangle ABC est rectangle en A donc son aire vaut $\dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{\sqrt{66} \times \sqrt{17}}{2} = \dfrac{\sqrt{1122}}{2}$.

3. **a.** Les points A, B, C et S sont coplanaires si et seulement si le point S appartient au plan (ABC).

Le plan (ABC) a pour équation $5x + 16y + 29z + 21 = 0$.

$5x_S + 16y_S + 29z_S + 21 = 5 \times 13 + 16 \times 37 + 29 \times 54 + 21 = 1705 \neq 0$ donc $S \notin (ABC)$.

Les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par S coupe le plan (ABC) en un point noté H.

La droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$. Donc le vecteur $\overrightarrow{SH}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ donc le vecteur $\overrightarrow{SH}$ a pour coordonnées $(5k\,;\,16k\,;\,29k)$ où k est un réel. Si le point H a pour coordonnées $(x_H\,;\,y_H\,;\,z_H)$, le vecteur $\overrightarrow{SH}$ a pour coordonnées $(x_H - 13\,;\,y_H - 37\,;\,z_H - 54)$.

On en déduit : $\left\{\begin{array}{rcl} x_H &=& 13 + 5k \\ y_H &=& 37 + 16k \\ z_H &=& 54 + 29k \end{array}\right.$

On exprime que H appartient au plan (ABC), ce qui va permettre de déterminer la valeur de k :

$$\begin{aligned} 5x_H + 16y_H + 29z_H + 21 = 0 &\iff 5(13+5k) + 16(37+16k) + 29(54+29k) + 21 = 0 \\ &\iff 65 + 25k + 592 + 256k + 1566 + 841k + 21 = 0 \\ &\iff 2244 + 1122k = 0 \iff k = -2 \end{aligned}$$

Donc le point H a pour coordonnées : $\left\{\begin{array}{rclcr} x_H &=& 13 + 5(-2) &=& 3 \\ y_H &=& 37 + 16(-2) &=& 5 \\ z_H &=& 54 + 29(-2) &=& -4 \end{array}\right.$

4. Le volume du tétraèdre SABC est $\dfrac{\text{aire(ABC)} \times SH}{3}$.

Le vecteur $\overrightarrow{SH}$ a pour coordonnées $(5k\,;\,16k\,;\,29k)$ donc $(5(-2)\,;\,16(-2)\,;\,29(-2)) = (-10\,;\,-32\,;\,-58)$. Donc $SH^2 = (-10)^2 + (-32)^2 + (-58)^2 = 4488$ et donc $SH = \sqrt{4488} = 2\sqrt{1122}$.

$\text{aire(ABC)} = \dfrac{\sqrt{1122}}{2}$ donc le volume du tétraèdre est $\dfrac{\dfrac{\sqrt{1122}}{2} \times 2\sqrt{1122}}{3} = \dfrac{1122}{3} = 374$ unités de volume.

Exercice VII

Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

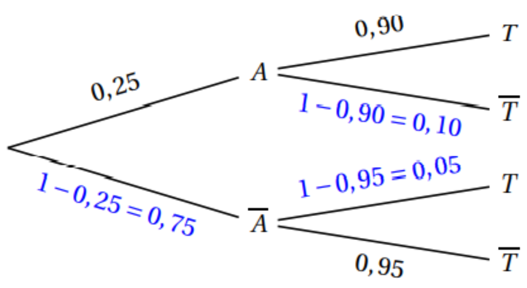
- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.
On considère les évènements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques » ;
- T : « le test est positif » ;
- $\overline{A}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires de A et T.

1. On résume la situation par un arbre pondéré.



$P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,25 \times 0,90 = 0,225$

2. D'après la formule des probabilités totales :
$P(T) = P(A \cap T) + P\left(\overline{A} \cap T\right) = 0,225 + 0,75 \times 0,05 = 0,2625$
3. On choisit un patient ayant un test positif. La probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques est :
$P_T(A) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,225}{0,2625} \approx 0,8571$
4. **a.** Les évènements correspondant à un résultat erroné du test sont : $\overline{A} \cap T$ et $A \cap \overline{T}$.

   b. On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».
   $P(E) = P\left(\overline{A} \cap T\right) + P\left(A \cap \overline{T}\right) = 0,25 \times 0,10 + 0,75 \times 0,05 = 0,0625$

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés. On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.

a. On a une répétition de 50 épreuves indépendantes et identiques n'ayant que deux issues et dont le succès a pour probabilité $p = 0,0625$; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0,0625$.

b. $P(X = 7) = \binom{50}{7} \times 0,0625^7 \times (1 - 0,0625)^{50-7} \approx 0,0237$

c. La probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné est :

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{50}{0} \times 0,0625^0 \times (1 - 0,0625)^{50} \approx 0,9603$

2. On cherche la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à $0,95$.

$P(X \geqslant 10) > 0,95 \iff P(X < 10) \leqslant 0,05 \iff P(X \leqslant 9) \leqslant 0,05$

À la calculatrice, par essais successifs, on trouve :

- pour $n = 247$, $P(X \leqslant 9) \approx 0,0514$;
- pour $n = 248$, $P(X \leqslant 9) \approx 0,0498$.

Il faut donc un échantillon de taille au moins 248 pour que $P(X \geqslant 10) \geqslant 0,95$.

<u>Attention</u> : il y a une imprécision dans le corrigé de cette question, X ne désigne pas la même variable aléatoire qu'à la question 1 : ici X de la question 2 suit la loi binomiale de paramètre n inconnu et p = 0,0625.