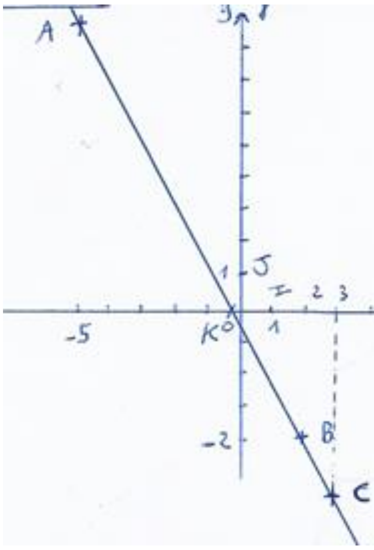
Exercice I



A, B, C sont alignés équivaut à $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires ou encore à $\det(\vec{AB} ; \vec{AC}) = 0$.

Or, $\vec{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ -13 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} x+5 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{AB} ; \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 7 & x+5 \\ -13 & -6 \end{vmatrix} = 7x - (-13)\times(x+5)$

$\det(\vec{AB} ; \vec{AC}) = -42 + 13(x+5) = -42 + 13x + 65$

$\det(\vec{AB} ; \vec{AC}) = 13x + 23$

$\det(\vec{AB} ; \vec{AC}) = 0 \iff 13x + 23 = 0 \iff 13x = -23 \iff x = -\frac{23}{13}$. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{23}{13}\right\}$.

Donc $\boxed{A, B, C \text{ alignés si et seulement si } C\left(-\frac{23}{13} ; 3\right)}$.

② K appartient à l'axe des abscisses, donc $\underline{K(x_K ; 0)}$.

$K \in (AB) \iff K, A, B$ sont alignés $\iff \vec{AK}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires $\iff \det(\vec{AK} ; \vec{AB}) = 0$

Or $\vec{AK}\begin{pmatrix} x_K+5 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ -13 \end{pmatrix}$ (f-q1). $\det(\vec{AK} ; \vec{AB}) = \begin{vmatrix} x_K+5 & 7 \\ -9 & -13 \end{vmatrix} = -13(x_K+5) - (-9)\times 7$

$\det(\vec{AK} ; \vec{AB}) = -13x_K - 65 + 63 = -13x_K - 2$.

$\det(\vec{AK} ; \vec{AB}) = 0 \iff -13x_K - 2 = 0 \iff 13x_K = -2 \iff x_K = \frac{-2}{13}$. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{2}{13}\right\}$.

Ainsi (AB) coupe l'axe des abscisses en $\boxed{K\left(-\frac{2}{13} ; 0\right)}$.

Exercice II

a) $(AB) \parallel (CD) \iff \vec{AB}$ et $\vec{CD}$ colinéaires $\iff \det(\vec{AB} ; \vec{CD}) = 0$.

Or $\vec{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 18 \end{pmatrix}$ et $\vec{CD}\begin{pmatrix} x+3 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\det(\vec{AB} ; \vec{CD}) = \begin{vmatrix} 3 & x+3 \\ 18 & 12 \end{vmatrix} = 3\times 12 - 18(x+3) = 36 - 18x - 54$.

$\det(\vec{AB} ; \vec{CD}) = 0 \iff -18x - 18 = 0 \iff 18x = -18 \iff x = -\frac{18}{18} = -1$. $\underline{\mathcal{S} = \{-1\}}$.

$\underline{(AB) \parallel (CD) \text{ ssi } D(-1 ; 14)}$.

b) $\vec{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 18 \end{pmatrix}$ et pour $x = -1$, $\vec{CD}\begin{pmatrix} -1+3=2 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\vec{AB} \neq \vec{CD}$ vu que ces deux vecteurs n'ont pas les mêmes coordonnées. Donc ABDC n'est pas un pgm.

c) On prend ici $x = -1$ (oubli de l'énoncé :-c).

$\vec{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 18 \end{pmatrix}$ donc $3\vec{AB}\begin{pmatrix} 9 \\ 54 \end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$, donc $2\vec{AC}\begin{pmatrix} -14 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Par suite, $3\vec{AB} + 2\vec{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ 70 \end{pmatrix}$, donc $\|3\vec{AB} + 2\vec{AC}\| = \sqrt{(-5)^2 + 70^2} = \sqrt{25 + 4925} = \sqrt{4925}$

c $\|3\vec{AB} + 2\vec{AC}\| = \sqrt{25 \times 197} = 5\sqrt{197}$

Exercice III **Figure et conjectures faciles : alignement des dits points, et les dites droites sont concourantes.**

1) Dans le repère $(A;B;D)$:

$A(0;0)$; $B(1;0)$; $C(1;1)$; $D(0;1)$; $E\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$; $I\left(\frac{1}{2};0\right)$; $J\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} x_E - x_D = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \\ y_E - y_D = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \\ 0 - 1 = -1 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DI}$ (*) : $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont colinéaires et ayant le point D en commun, il en résulte que les points D, E, I sont alignés : la conjecture i) est donc validée.

(*) Si vous ne voyez pas cette relation (calcul mental sur les coordonnées), calculez $\det(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DI})$!

(3) $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} 0 - 1 = -1 \\ \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BJ}) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\times(-1) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.$

donc $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires, donc les points B, E, J sont alignés ; la conjecture ii) est validée.

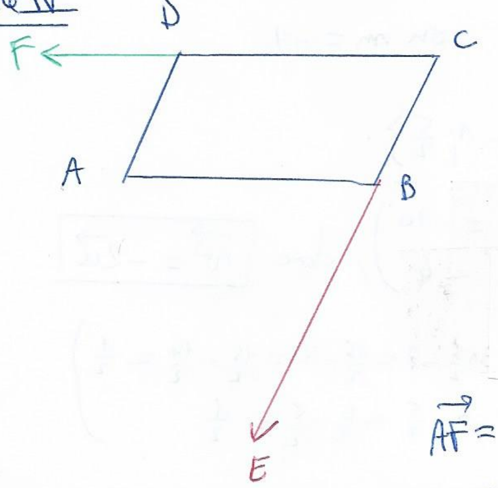
(4) D'après la question (2), D, E, I sont alignés, donc $E \in (DI)$.

D'après la question (3), B, E, J sont alignés, donc $E \in (BJ)$.

Par construction, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, donc A, E, C sont alignés, donc $E \in (AC)$.

Par suite, E est le point d'intersection des droites (AC), (DI) et (BJ) qui concourent donc en E.

Exercice IV



$\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ (Chasles)

$\boxed{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}}$ (*)

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}.$

Or ABCD est un pgm, donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

donc $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\boxed{\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$ (**)

Grâce à (*) et (**), on a : $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$: les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et ont le point A en commun, donc les points A, E et F sont alignés.

Exercice V

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}4-m\\ m-1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}3m-7\\ 3-m\end{pmatrix}$

1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v})=0$.

Or, $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}4-m & 3m-7\\ m-1 & 3-m\end{vmatrix} = (4-m)(3-m) - (m-1)(3m-7)$.

$\det(\vec{u};\vec{v}) = 12-4m-3m+m^2-(3m^2-7m-3m+7)$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = 12-7m+m^2-3m^2+10m-7 = -2m^2+3m+5$

$\det(\vec{u};\vec{v})=0 \iff -2m^2+3m+5=0 \iff 2m^2-3m-5=0$ $(A=0 \iff -A=0)$

Donc $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires si et seulement si } 2m^2-3m-5=0}$

2a) $(2m-5)(m+1) = 2m^2+2m-5m-5 = 2m^2-3m-5$.

2b) D'après 1) et 2a), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(2m-5)(m+1)=0$

Ce qui équivaut (produit nul) à : $2m-5=0$ ou $m+1=0$

$m=\frac{5}{2}$ ou $m=-1$

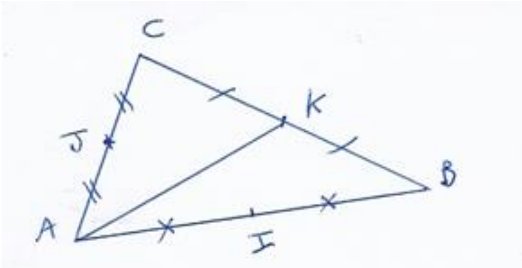
$S = \{-1; \frac{5}{2}\}$.

*) Si $m=-1$, alors $\vec{u}\begin{pmatrix}4-(-1)=5\\ -1-1=-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3-7=-10\\ 3-(-1)=4\end{pmatrix}$, donc $\boxed{\vec{v}=-2\vec{u}}$

**) Si $m=\frac{5}{2}$, alors $\vec{u}\begin{pmatrix}4-\frac{5}{2}=\frac{8}{2}-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}\\ \frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\times\frac{5}{2}-7=\frac{15}{2}-7=\frac{15}{2}-\frac{14}{2}=\frac{1}{2}\\ 3-\frac{5}{2}=\frac{6}{2}-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Donc $\boxed{\vec{v}=\frac{1}{3}\vec{u}}$

Exercice VI



i) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}$ (relation de Chasles). Donc $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}$

$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KC}$

Or, K = milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$, par suite, $\boxed{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}} = 2\overrightarrow{MK}+\vec{0} = \boxed{2\overrightarrow{MK}}$

de même, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}$ (Chasles).

D'où : $\boxed{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}} = 2\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA} = 3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA} = \boxed{\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{MK}}$. (*)

ii) d'après (*) : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{MK} = \vec{0} \iff \overrightarrow{KA} = -3\overrightarrow{MK} = 3\overrightarrow{KM}$

appliquée à G au lieu de M

$\iff \overrightarrow{KM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KA}$: cette relation définit un unique point M

donc $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{KG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KA}$.

$\overrightarrow{KG}$ et $\overrightarrow{KA}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{KG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KA}$, donc K, G, A sont alignés car K est commun aux vecteurs $\overrightarrow{KG}$ et $\overrightarrow{KA}$: Donc $G \in (AK)$.

Vu que K = milieu de $[BC]$, on a (AK) qui est la médiane issue de A du triangle ABC.

iii) de même qu'en i) et ii) : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{MI}$ pour tout point M du plan.

En particulier, pour G de la question ii) : $\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{q.\,ii)\ \overset{\text{"}}{\vec{0}}} = \overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{GI}$

Donc $\overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{GI} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$, donc $\boxed{G \in (IC)}$

Idem avec $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{MJ}$ appliquée à M = G (G défini en ii)) conduit à :

$\overrightarrow{JG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JB}$, donc $\boxed{G \in (JB)}$

On vient d'établir qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et que ce dernier est le point d'intersection des trois médianes du triangle ABC :

on a prouvé que quel que soit le triangle, les trois médianes sont concourantes (= se coupent en un même point).