Terminale Maths Groupe 3 **Corrigé du DM10** **Février 2024**

Exercice I

1a) $A(1;2;3)$ $B(-1;4;5)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-1-1=-2\\4-2=2\\5-3=2\end{pmatrix}$ dirige (AB), donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige également (AB) car $\vec{AB}=2\vec{u}$.

Rq : essayez, si possible, de prendre un vecteur directeur dont les coordonnées sont "les plus petites" possible.

Une R-P de (AB) dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et passant par $A(1;2;3)$ est donc : $\begin{cases}x=1+(-1)t\\y=2+1t\\z=3+1t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

En simplifiant, une R-P de (AB) est donc : $\boxed{\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}}$

1b) Soit (Δ) la droite passant par $C(0;0;11)$ et parallèle à (AB) : Vu que $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige (AB) et que $(AB)//(\Delta)$, $\vec{u}$ dirige également (Δ), de sorte que, une R-P de la droite (Δ) est donc : $\boxed{\begin{cases}x=0-t'=-t'\\y=0+t'=t'\\z=11+t'\end{cases},\ t'\in\mathbb{R}}$.

② $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}0-1=-1\\0-2=-2\\11-3=8\end{pmatrix}$. Or $\frac{-2}{-1}=2$ et $\frac{2}{-2}=-1$. Vu que $2\neq-1$ il en résulte que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles, et à ce titre, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés et forment donc un unique plan, le plan (ABC).

③ $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ dirige (AB) et $\vec{CD}\begin{pmatrix}3-0=3\\0-0=0\\1-11=-10\end{pmatrix}$ dirige (CD).

$\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont non colinéaires car $\frac{3}{-2}\neq\frac{0}{2}$, donc (AB) et (CD) ne sont ni parallèles, ni confondues.

Étudions l'intersection de (AB) et (CD), en commençant par donner une R-P de (CD) :

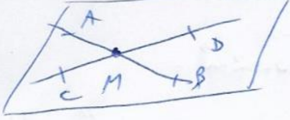
$\vec{CD}\begin{pmatrix}3\\0\\-10\end{pmatrix}$ dirige (CD) et (CD) passe par $C(0;0;11)$, donc une R-P de (CD) est $\boxed{\begin{cases}x=0+3s=3s\\y=0+0s=0\\z=11-10s\end{cases},\ s\in\mathbb{R}}$

$M(x;y;z)\in(AB)\cap(CD) \iff \exists t\in\mathbb{R}, \exists s\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}x=1-t=3s\\y=2+t=0\\z=3+t=11-10s\end{cases} \iff \begin{cases}t=-2\\1-(-2)=3s\\3-2=11-10s\end{cases}$

$\iff \begin{cases}t=-2\\s=\frac{3}{3}=1\\1=11-10\times1 : 1=1 : \text{système compatible !}\end{cases}$

Par suite, $\begin{cases}x=1-t=1-(-2)=3\\y=0\\z=3+t=3+(-2)=1\end{cases}$, donc $M(3;0;1)$ est le point d'intersection des droites (AB) et (CD) qui sont donc sécantes en ce point M.

On en déduit que les points A, B, C et D sont COPLANAIRES car deux droites sécantes sont coplanaires.



(4) ACBE est un pgm $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$

Soit $E(x;y;z)$: $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}-1-x\\4-y\\5-z\end{pmatrix}$ $\Bigg\}$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB} \Longleftrightarrow \begin{cases}-1=-1-x\\-2=4-y\\8=5-z\end{cases}$

2 vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées.

$\Longleftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=4+2=6\\z=5-8=-3\end{cases}$. Donc $E(0;6;-3)$ et ACBE est un pgm.

Soit K le centre de ACBE. K est le point d'intersection des diagonales [AB] et [CE] de ce pgm.
Or un pgm a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, donc K = Milieu de [AB].

Par suite, $K\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$, $K\left(\frac{1+(-1)}{2}; \frac{2+4}{2}; \frac{3+5}{2}\right)$, $\boxed{K(0;3;4)}$

(5) $F(-4;4;15)$ et $A(1;2;3)$, donc $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-4-1=-5\\4-2=2\\15-3=12\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\8\end{pmatrix}$ (déjà vu q. précédentes).

Donc, $a\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2a\\2a\\2a\end{pmatrix}$ et $b\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-b\\-2b\\8b\end{pmatrix}$, donc $a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2a-b\\2a-2b\\2a+8b\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AF} = a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC} \Longleftrightarrow \begin{cases}-5=-2a-b\\2=2a-2b\\12=2a+8b\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}b=-2a+5\\2=2a-2(-2a+5)=6a-10\\12=2a+8(-2a+5)=-14a+40\end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases}b=-2a+5\\6a=12\\14a=20-12=28\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}a=2\\a=2\\b=-2\times2+5=1\end{cases}$ système compatible !

Donc $\boxed{\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$ Vu que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires (cf. ②), $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est une base du plan (ABC). Comme $\overrightarrow{AF}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, il en résulte que les quatre points A, B, C et F sont COPLANAIRES (i.e) $\boxed{F\in(ABC)}$.

(6) Par simple lecture sur la R-P de $\mathcal{D}$ on peut dire que : $\mathcal{D}$ passe par $P(2;3;1)$ et $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$. Autre caractérisation : $\mathcal{D}$ est la droite passant par $P(2;3;1)$ et $Z(5;0;7)$

$\lambda=3$ dans la R-P.

(7) On cherche s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}0{,}4=2+\lambda\\2{,}5=3-\lambda\\1=1+2\lambda\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\lambda=0{,}4-2=-1{,}6\\\lambda=3-2{,}5=0{,}5\end{cases}$ système incompatible !

Donc $\boxed{W(0{,}4;2{,}5;1)\notin(\mathcal{D})}$

De même, existe-t-il $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}-9=2+\lambda\\14=3-\lambda\\-21=1+2\lambda\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\lambda=-9-2=-11\\\lambda=3-14=-11\\\lambda=\frac{-21-1}{2}=-11\end{cases}$ système compatible ! $\boxed{L(-9;14;-21)\in\mathcal{D}}$

Exercice II

53 **a)** $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$ définit le plan (ABC). Or K est un point de (CD), donc est dans le plan (ABC) : il existe donc deux réels x, y tels que $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CA} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

donc $x = \frac{1}{5}$ et $y = 1$.

100 **1. a)** $\overrightarrow{AB}\left(-3\,;-\frac{3}{2}\,;-\frac{9}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(1\,;\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C définissent un plan.

b) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan.

2. $\overrightarrow{EF}\left(-1\,;-\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$.

On remarque que $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires. Par conséquent la droite (EF) est parallèle au plan (ABC).

49 **a)** $\vec{u}(-1;2;1)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{u}'(1;-1;-2)$ est un vecteur directeur de d'.

b) Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas proportionnelles donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites d et d' ne sont pas parallèles.

Les droites d et d' peuvent être sécantes ou non coplanaires.

c) On résout le système :

$$\begin{cases} 1-t=2+t' \\ 2+2t=-2-t' \\ -1+t=-2t' \end{cases} \text{ qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} t+t'=-1 \\ 2t+t'=-4 \\ t+2t'=1 \end{cases} \text{ ainsi } \begin{cases} t'=2 \\ t=-3 \end{cases}$$

On remplace t dans la représentation paramétrique de d et on obtient :

$$\begin{cases} x=4 \\ y=-4 \\ z=-4 \end{cases}$$

Le point d'intersection de d et d' a pour coordonnées $(4\,;-4\,;-4)$.

53 $\vec{u}(3\,;1;-1)$ est un vecteur directeur de d.

$\vec{u}'(1;1;-1)$ est un vecteur directeur de d'.

Or $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires donc d et d' ne sont pas parallèles.

On résout le système :

$$\begin{cases} 3t = 1 + t' \\ -1 + t = t' \\ 2 - t = 3 - t' \end{cases} \quad \text{qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} 3t - t' = 1 \\ t - t' = 1 \\ t - t' = -1 \end{cases}$$

Ce qui est impossible.

Ainsi, d et d' ne sont ni parallèles, ni sécantes donc elles sont non coplanaires.

Exercice III

1) Réponse **C.**
2) Réponse **D.**
3) Réponse **A.**
4) Réponse **B.**

Exercice IV

A)1) $g(x)=0 \iff 4x - x\ln(x) = 0 \iff x(4-\ln(x)) = 0 \iff \left| \begin{array}{l} x=0 \\ \text{ou} \\ 4-\ln(x)=0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x=0 \\ \text{ou} \\ \ln(x)=4 \end{array} \right.$

$g(x)=0 \iff \left| \begin{array}{l} x=0 \\ \text{ou} \\ e^{\ln(x)} = e^4 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x=0 \\ \text{ou} \\ x=e^4 \end{array} \right.$

Or $x \in]0;+\infty[$, donc $\underline{x \neq 0}$, et par suite, $\boxed{\mathcal{S} = \{e^4\}}$.

② $g(x) = x(4 - \ln(x))$ avec $x > 0$.

Faisons un tableau de signes : $4 - \ln(x) \geq 0 \iff 4 \geq \ln(x) \iff e^4 \geq e^{\ln(x)} \iff x \leq e^4$

(exp. str. croissante sur $\mathbb{R}$)

D'où :

x	0		e^4		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$4-\ln(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)=x(4-\ln(x))$	‖	$+$	0	$-$	

③ Grâce au tableau de signe précédent, g n'est pas de signe constant sur $]0;+\infty[$: la conjecture :

$(g(x) \leq 0$ sur $[e^4;+\infty[)$.

x) "<u>g est positive" est donc fausse !</u>

xx) On a : $1 < e^4$ et $g(1) = 4\times1 - 1\times\ln(1) = 4$

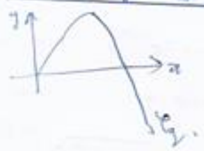
$g(e^4) = 0$ (cf. ②).

Donc $g(1) > g(e^4)$.

Par suite, g ne peut pas être strictement croissante sur $]0;+\infty[$: <u>la seconde conjecture est encore fausse</u>.

(sinon on aurait eu $g(1) < g(e^4)$!).

<u>Rq</u> : l'élève 4.0 aura tracé $\mathcal{C}_g$ avec une autre fenêtre :



<u>Partie B</u>

1a) $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0}$

Or, pour $x>0$, $x\ln(x) = x\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = -x\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

Soit $X = \frac{1}{x}$: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$, donc par <u>limite de composée</u> : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0.}$

1b) $g(x) = 4x - x\ln(x)$.

Or, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 4x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0$, donc par <u>limite de somme</u>, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = 0}$.

1c) $g(x) = 4x - x\ln(x) = x(4 - \ln(x))$. (on a une F.I en $+\infty$ si on ne factorise pas).

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (4 - \ln(x)) = -\infty$

donc par <u>limite de produit</u>, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$

2a) $g(x) = x(4-\ln(x)) = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = 4 - \ln(x) \\ v'(x) = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \end{cases}$.

$\boxed{g'(x)} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1(4-\ln(x)) + x \times \left(-\frac{1}{x}\right) = 4 - \ln(x) - 1 = \boxed{3-\ln(x)}$.

2b) $g'(x) \geq 0 \iff 3 - \ln(x) \geq 0 \iff 3 \geq \ln(x) \iff e^3 \geq e^{\ln(x)} \iff e^3 \geq x$

$g'(x) \geq 0 \iff 0 < x \leq e^3$

D'après le théorème de Lagrange :

x	0		e^3		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 0	$\nearrow$	e^3	$\searrow$	$-\infty$

$g(e^3) = 4e^3 - e^3\ln(e^3) = 4e^3 - e^3 \times 3\ln(e) = 4e^3 - e^3 \times 3 = e^3$

3a) $a > 0$. Notons T_A la tangente à $\mathcal{C}_g$ en $A(a\,;g(a))$:

T_A a pour équation réduite : $y = g'(a)(x-a) + g(a)$ avec : $g'(a) = 3 - \ln(a)$
$g(a) = 4a - a\ln(a)$.

$y = (3-\ln(a))(x-a) + 4a - a\ln(a)$.

$y = (3-\ln(a))x - 3a + a\ln(a) + 4a - a\ln(a)$

$$\boxed{y = (3-\ln(a))x + a}$$

3b) $B(1;5) \in T_A \iff 5 = (3-\ln(a)) \times 1 + a \iff 5 = 3 - \ln(a) + a \iff a - \ln(a) - 2 = 0$.

Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$, par : $h(x) = x - \ln(x) - 2$: a est donc solution de $h(x) = 0$.

$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

$x > 0$, donc $h'(x)$ a le même signe que $x - 1$.

$h'(x) > 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1$.

Donc d'après le th. de Lagrange :

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$h(1) = 1 - \ln(1) - 2 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{2}{x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$

donc par limite de somme et produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

Sur $]0\,;1]$, h est continue, car dérivable ; h est strictement décroissante sur $]0\,;1]$ et $0 \in [-1\,;+\infty[$: d'après le Corollaire du T.V.I, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution, notée α_1, sur $]0\,;1]$.

Le même raisonnement conduit sur $]1\,;+\infty[$ permet d'établir que $h(x) = 0$ admet une unique solution notée α_2 sur $]1\,;+\infty[$.

Ainsi, $h(x) = 0$ admet deux solutions sur $]0\,;+\infty[$.

Par suite, il y a deux tangentes à $\mathcal{C}_h$ qui passent par $B(1\,;5)$.

BONUS

a) $\log_2(3x) + \log_4(x^2) = 2$ équivaut à : $\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{\ln(3x)}{\ln(2)} + \dfrac{\ln(x^2)}{\ln(4)} = 2 \end{cases}$

Or $\ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2)$, donc : $\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{\ln(3x)}{\ln(2)} + \dfrac{\ln(x^2)}{2\ln(2)} = 2 \end{cases}$

donc : $\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{2\ln(3x)}{2\ln(2)} + \dfrac{\ln(x^2)}{2\ln(2)} = 2 \end{cases}$, donc $\begin{cases} x > 0 \\ 2\ln(3x) + \ln(x^2) = 4\ln(2) \end{cases}$

donc : $\begin{cases} x > 0 \\ 2(\ln(3) + \ln(x)) + 2\ln(x) = 4\ln(2) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x > 0 \\ 4\ln(x) + 2\ln(3) = 4\ln(2) \end{cases}$

donc $\begin{cases} x > 0 \\ 4\ln(x) = 4\ln(2) - 2\ln(3) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) = \dfrac{4\ln(2) - 2\ln(3)}{4} = \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3) = \ln(2) - \ln(\sqrt{3}) \end{cases}$

donc $\begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \end{cases}$ donc $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad S = \left\{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

) $\log_2\left(\sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(8\sqrt{4\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\log_2(8) + \frac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{4\sqrt{2}}\right)$

$\log_2\left(\sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}\right) = \frac{1}{2}\log_2(2^3) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\log_2(4\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\underbrace{\log_2(2)}_{=1\,!} + \frac{1}{4}\log_2(4\sqrt{2})$

$\log_2\left(\sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}\right) = 1 + \frac{1}{4}\log_2(4) + \frac{1}{4}\log_2(\sqrt{2}) = 1 + \frac{1}{4} \times \log_2(2^2) + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\underbrace{\log_2(2)}_{=1}$

$\log_2\left(\sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}\right) = 1 + \frac{1}{4} \times 2\underbrace{\log_2(2)}_{1} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{13}{8}}$

C)

Avec la calculette : $x = \ln \pi \approx 1{,}14$ $\quad y = \log_5 2 \approx 0{,}43$ $\quad$ et $\quad z = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}60$.

Sans calculette : $\pi > e$ donc $\ln \pi > 1$; $\log_5 2 = \frac{\ln 2}{\ln 5}$ et, comme $\frac{\ln 2}{\ln 4} = \frac{1}{2}$, $\log_5 2 < \frac{1}{2}$; de l'inégalité $e < 3$ on tire $z = \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$ et l'on a évidemment $z < 1$. D'où $y < z < x$.