Exercice I

1)

a) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f et de l'axe des abscisses.

Ici, $f(x)=0$ lorsque : $x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = 3$: $\mathscr{S}=\{-1\ ;\ 1\ ;\ 3\}$.

b) Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ sont les abscisses de tous les points de la courbe représentant f qui sont situés au-dessus de l'axe des abscisses, en y incluant les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f et de l'axe des abscisses car symbole $\geqslant$!

Ici, $f(x) \geqslant 0$ équivaut à : $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ou $3 \leqslant x \leqslant 4$: $\mathscr{S}=[-1\ ;\ 1] \cup [3\ ;\ 4]$.

Les solutions de l'inéquation $f(x) < 2$ sont les abscisses de tous les points de la courbe représentant f qui sont situés au-dessous de la droite d'équation $y = 2$.

Ici, $f(x) < 2$ équivaut à : $-4 \leqslant x < 3{,}7$. (3,7 étant une valeur approchée ici).

c) ❤ *$f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant f notée C_f en son point d'abscisse x.* ❤

❤ *Dire que $f'(x)=0$ signifie qu'au point de C_f d'abscisse x, il y a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (on dit tangente horizontale).* ❤

❤❤ *Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ revient donc à chercher les abscisses des points de C_f en lesquels il y a une tangente horizontale.* ❤❤

Ici, $f'(x) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = 2$: $\mathscr{S}=\{0\ ;\ 2\}$.

d) $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f en son point d'abscisse -1.

On trace donc approximativement la tangente à C_f en son point d'abscisse -1, qui est ici le point nommé A de coordonnées : A$(-1\ ;0)$.

Manifestement, cette tangente passe par le point B$(-2\ ;\ -2)$.

Le coefficient directeur de cette tangente est m, avec : $\boxed{m} = f'(-1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-0}{-2-(-1)} = \frac{-2}{-1} = 2$.

e)

x	-2		0		2		4
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	1	↘	-1	↗	3

2a) Ici $g'(x)=0$ lorsque $\mathscr{C}_{g'}$ rencontre l'axe des abscisses.

$g'(x)=0$ a donc pour solutions : $x=-1$; $x=1$ et $x=3$: $\mathscr{S}=\{-1 ; 1 ; 3\}$.

2b)

x	-2		-1		1		3		4
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Exercice II

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x - 11$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $\underline{f'(x)} = 3x^2 + 4 \times 2x + 5 = \underline{3x^2 + 8x + 5}$.

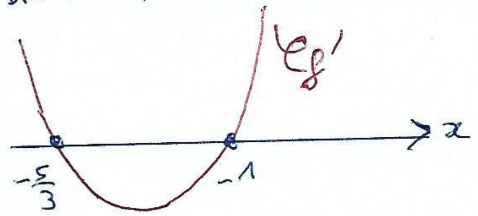
Etudions à présent le $\underline{\text{signe de } f'(x) \text{ sur } \mathbb{R}}$:

$f'(x) = 3x^2 + 8x + 5$ est une fonction trinôme de la forme $f'(x) = ax^2 + bx + c$

avec : $\begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \\ c = 5 \end{cases}$. $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 3 \times 5 = 64 - 60 = 4$.

$\Delta > 0$, donc ce trinôme admet deux racines réelles : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-\sqrt{4}}{6} = -\dfrac{10}{6} = -\dfrac{5}{3} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+\sqrt{4}}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1 \end{cases}$

$\underline{\text{Croquis}}$: $a = 3$, donc $a > 0$ et $\mathcal{C}_{f'}$ est une parabole de la forme " branches tournées vers le haut " :



Par suite, sur $]-\frac{5}{3} ; -1[$, $\mathcal{C}_{f'}$ est située au-dessous de l'axe des abscisses, donc si $-\frac{5}{3} < x < -1$, alors $f'(x) < 0$, donc f décroît sur $]-\frac{5}{3} ; -1[$.

Sur chacun des intervalles $]-\infty ; -\frac{5}{3}]$ et $[-1 ; +\infty[$ on a $f'(x) \geq 0$, donc f croît sur $]-\infty ; -\frac{5}{3}]$ et f croît sur $[-1 ; +\infty[$.

d'où :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{347}{27}$	$\searrow$	-13	$\nearrow$	

$f(-1) = -13$

$f(-\frac{5}{3}) = \dfrac{-347}{27}$

(Calculatrice).

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable en $a = \frac{1}{2}$.

Par suite, $\mathcal{C}_f$ admet en le point $A(\frac{1}{2} ; f(\frac{1}{2}))$ une tangente notée T_A dont l'équation réduite est : ♡ $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec ici $a = \frac{1}{2}$ = abscisse du point A.

OR $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\times\frac{1}{2} - 11 = \frac{1}{8} + 1 + \frac{5}{2} - 11 = \frac{1}{8} + \frac{8}{8} + \frac{20}{8} - \frac{88}{8} = \frac{-59}{8} \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8\times\frac{1}{2} + 5 = 3\times\frac{1}{4} + 4 + 5 = \frac{3}{4} + 9 = \frac{3}{4} + \frac{36}{4} = \frac{39}{4}. \end{cases}$

<u>TA a pour équation réduite</u> : $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

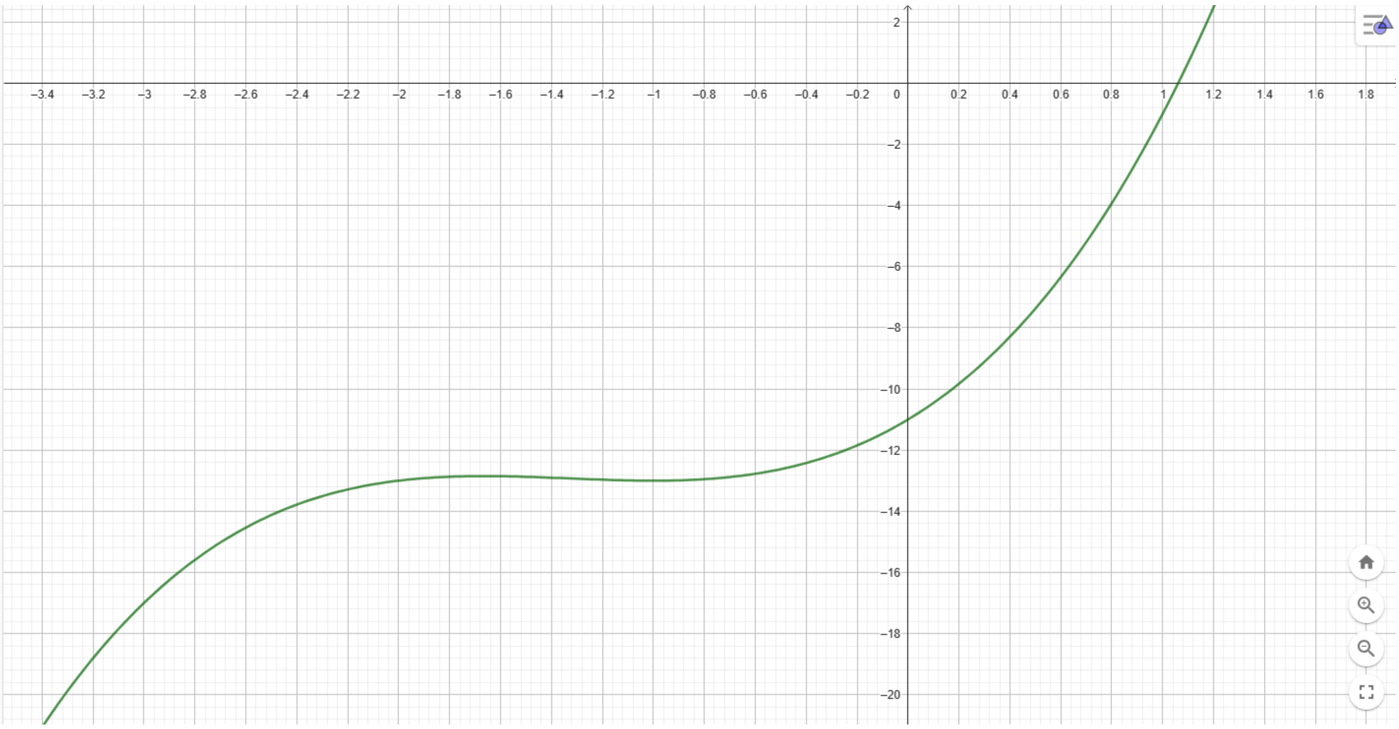
$$y = \frac{39}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{59}{8}$$

$$y = \frac{39}{4}x - \frac{39}{8} - \frac{59}{8}$$

$$y = \frac{39}{4}x - \frac{20}{8}$$

$$\boxed{y = \frac{39}{4}x - \frac{15}{4}}$$

c)



<u>Exercice III</u>

$f(x) = \dfrac{ae^x}{be^x - 1}$.

1) Si $b=1$, alors on aurait : $f(x) = \dfrac{ae^x}{e^x - 1}$.

OR, $e^x - 1 = 0$ équivaut à : $e^x = 1$ et $1 = e^0$, donc $e^x = e^0$ c'est à dire $x = 0$.

Par suite, le dénominateur de l'expression de $f(x)$ s'annulerait lorsque $x=0$, donc f ne serait pas défini sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R}^*$, ce qui est contraire à la donnée de l'énoncé "f est défini sur $\mathbb{R}$".

Ainsi, $\boxed{b \neq 1}$

2) $f(x) = \dfrac{ae^x}{be^x - 1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = ae^x \\ u'(x) = ae^x \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = be^x - 1 \\ v'(x) = be^x \end{cases}$

(a et b sont des constantes vis à vis de x on dérive donc des "multiples" de fonctions".

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

♡ $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ ♡ (dérivée d'un quotient). ⚠ $u'v - uv' \neq uv' - u'v$ attention à l'ordre des termes dans une soustraction !

$\boxed{f'(x)} = \dfrac{ae^x(be^x - 1) - ae^x \times be^x}{(be^x - 1)^2} = \dfrac{ab\cancel{e^x \times e^x} - ae^x - ab\cancel{e^x \times e^x}}{(be^x - 1)^2} = \boxed{\dfrac{-ae^x}{(be^x - 1)^2}}$

3) $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ passe par } K(0;2), \text{ donc } f(0) = 2}$. ♡♡

OR $f(x) = \dfrac{ae^x}{be^x - 1}$, donc $f(0) = \dfrac{ae^0}{be^0 - 1} = \dfrac{a \times 1}{b \times 1 - 1} = \dfrac{a}{b-1}$.

Par suite, $f(0) = 2$ équivaut à dire que : $\dfrac{a}{b-1} = 2$ ou encore $\boxed{a = 2(b-1)}$ (*)

La tangente à $\mathcal{C}_f$ en K passe par L, donc (KL) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en K.

Par le cours, le coefficient directeur de (KL) est donc le nombre dérivé de f en l'abscisse de K, à savoir 0 : $\boxed{f'(0)} = \dfrac{y_L - y_K}{x_L - x_K} = \dfrac{3-2}{1-0} = \boxed{1}$

OR d'après la question 2), $f'(x) = \dfrac{-ae^x}{(be^x - 1)^2}$ (pour tout réel x).

Donc $f'(0) = \dfrac{-ae^0}{(be^0 - 1)^2} = \dfrac{-a}{(b-1)^2}$ et donc : $\boxed{\dfrac{-a}{(b-1)^2} = 1}$ (**)

(*) et (**) donnent : $\begin{cases} a = 2(b-1) & (*) \\ \dfrac{-a}{(b-1)^2} = 1 & (**) \end{cases}$ ou encore : $\begin{cases} a = 2(b-1) \\ -a = (b-1)^2 \end{cases}$

Résolvons ce système : $\begin{cases} a = 2(b-1) \\ -2(b-1) = (b-1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2(b-1) \\ (b-1)^2 + 2(b-1) = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = 2(b-1) \\ (b-1)(b-1+2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2(b-1) \\ (b-1)(b+1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2(b-1) \\ b+1 = 0 \end{cases}$

$b \neq 1$ (q.1), donc $b-1 \neq 0$, on peut donc simplifier la dernière égalité par $b-1$: on obtient : $b+1=0$

$\iff \begin{cases} b = -1 \\ a = 2(-1-1) = 2\times(-2) = -4. \end{cases}$

$\boxed{\mathcal{S} = \{(\underset{a}{-4} ; \underset{b}{-1})\}}$

En conclusion, pour tout réel x, $\boxed{f(x)} = \dfrac{-4e^x}{-e^x-1} = \dfrac{-4e^x}{-(e^x+1)} = \boxed{\dfrac{4e^x}{e^x+1}}$

Exercice IV

0) On commence la protocole à t $= 0$, donc on calcule $f(0)$: $f(0) = 3\times 0\times e^{-0,5\times 0+1} = 0$.

Il n'y avait donc aucune trace de médicament dans le sang du patient début de protocole.

$3h30min$ est égal à $3,5h$. On calcule donc $f(3,5)$: $f(3,5) = 3\times 3,5\times e^{-0,5\times 3,5+1}$, et avec une calculatrice on trouve que $f(3,5) \approx 5$. Il y avait donc environ 5 mg de médicament dans le sang du patient au bout de $3h30min$ de protocole.

1) $h(t)=e^{at+b}$ se dérive en : $h'(t) = ae^{at+b}$.
2) *a)* $f(t)= 3t\times e^{-0,5t+1}$ est écrite sous la forme d'un produit : ❤❤ $f(t)=u(t)v(t)$ avec :

$\begin{cases} u(t) = 3t \\ u'(t) = 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(t) = e^{-0,5t+1} \\ v'(t) = -0,5e^{-0,5t+1} \end{cases}$ (grâce à la question 1), avec ici $a = -0,5$ et $b = 1$).

f est dérivable sur $[0\ ;\ 10]$ et :

❤❤ $f'(t)=u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ ❤❤

$f'(t)=3e^{-0,5t+1} + 3t\times(-0,5e^{-0,5t+1}) = (3-1,5t)e^{-0,5t+1} = 3(1-0,5t)e^{-0,5t+1}$ *en factorisant par 3.*

b) Etudions le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$: cela nous permettra d'avoir le sens de variation de f *sur* $[0\ ;\ 10]$.

En effet, rappelons le résultat fondamental de première suivant :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

❤❤ ***Si pour tout réel x appartenant à I, f'(x) ⩾0, alors f est croissante sur I.*** ❤❤

❤❤ ***Si pour tout réel x appartenant à I, f'(x) ⩽ 0, alors f est décroissante sur I.*** ❤❤

Ici, $f'(t) = 3(1 - 0{,}5t)e^{-0{,}5t+1}$.

❤❤ ***La fonction exponentielle prend des valeurs strictement positives*** ❤❤***, donc pour tout réel t appartenant à*** [0 ; 10], $e^{-0{,}5t+1} > 0$. Or $3 > 0$, donc $f'(t)$ a le même signe que $1 - 0{,}5t$ *sur* [0 ; 10].

Ainsi, résoudre l'inéquation : $f'(t) \geqslant 0$ équivaut à : $1 - 0{,}5t \geqslant 0$ c'est-à-dire $1 \geqslant 0{,}5t$, et donc $\frac{1}{0{,}5} \geq t$ (on ne change pas le sens des inégalités en divisant chacun de ses membres par le même nombre strictement positif).

Ainsi, $f'(t) \geqslant 0$ équivaut à $t \leqslant 2$.

D'où le tableau de variation suivant, en tenant compte du fait que f est seulement définie sur [0 ; 10] :

t	0		2		10
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	0	↗	6	↘	$30e^{-4}$

$f(0) = 0$

$f(2) = 6e^0 = 6$

$f(10) = 30e^{-5+1} = 30e^{-4}$.

c) f croît sur $[0;2]$ et décroît sur $[2;10]$.

Donc le maximum de f est atteint pour $t=2$ et ce maximum est égal à $f(2) = 6$:

La dose maximale de médicament dans le sang sera atteinte au bout de 2 heures et sera égale à 6 mg.

3)

Le rôle de cet algorithme est d'afficher ***au bout de quelle durée minimale***, après le début du protocole, la quantité de médicament dans le sang du patient est ***strictement supérieure à 3mg.***

En le programmant sur python, on trouve : t = 0,464 *h*. (0,464 × 3600 = 1670,4).

C'est à la 1671ième seconde (soit au bout de 27 minutes et 51 secondes) que la quantité de médicament dépasse les 3 *mg*. (1671 divisé par 60 a pour quotient 27 et pour reste 51).