Exercice I

1) $\boxed{A} = 2 - \frac{5}{4} \times \frac{1}{10} = 2 - \frac{5 \times 1}{4 \times 10} = 2 - \frac{\cancel{5} \times 1}{4 \times \cancel{5} \times 2} = 2 - \frac{1}{8} = \frac{2}{1} - \frac{1}{8} = \frac{2 \times 8}{1 \times 8} - \frac{1}{8} = \frac{16}{8} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{15}{8}}$

$\boxed{B} = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \div \frac{3}{10} = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{3}{5} - \frac{2 \times 10}{5 \times 3} = \frac{3}{5} - \frac{2 \times \cancel{5} \times 2}{\cancel{5} \times 3} = \frac{3}{5} - \frac{4}{3} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} - \frac{4 \times 5}{3 \times 5} = \frac{9}{15} - \frac{20}{15} = \boxed{\frac{-1}{15}}$

$C = \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{7}\right) \times \frac{3}{4} - \frac{3}{4}$

$C = \left(\frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{5 \times 3}{7 \times 3}\right) \times \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \left(\frac{14}{21} + \frac{15}{21}\right) \times \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \frac{29}{21} \times \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \frac{29 \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times 7 \times 4} - \frac{3}{4}$

$\boxed{C} = \frac{29}{28} - \frac{3}{4} = \frac{29}{28} - \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{29}{28} - \frac{21}{28} = \frac{8}{28} = \boxed{\frac{2}{7}}$

2) $a = \frac{2}{3}$, donc $\frac{1}{a} = \frac{3}{2}$; $b = -\frac{3}{2}$ donc $\frac{1}{b} = -\frac{2}{3}$; $c = -\frac{3}{4}$ donc $\frac{1}{c} = -\frac{4}{3}$.

$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{3}{2} + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = \frac{3}{2} - \frac{6}{3} = \frac{3}{2} - 2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

3) $\boxed{A} = 3(5x + 4) = 3 \times 5x + 3 \times 4 = \boxed{15x + 12}$

$B = (3x - 5)(x - 3)$

$B = 3x \times x - 3x \times 3 - 5 \times x + 5 \times 3$

$B = 3x^2 - 9x - 5x + 15$

$\boxed{B} = \boxed{3x^2 - 14x + 15}$

$C = -(3x + 1)(-x + 7)$

$C = -(3x \times (-x) + 3x \times 7 + 1 \times (-x) + 1 \times 7)$

$C = -(-3x^2 + 21x - x + 7)$

$\boxed{C} = \boxed{3x^2 - 21x + x - 7}$

$D = (3x - 4y)(x + y)$

$D = 3x \times x + 3x \times y - 4y \times x - 4y \times y$.

$D = 3x^2 + 3xy - 4yx - 4y^2$ et comme $xy = yx$, $3xy - 4yx = 3xy - 4xy = -1xy$

$\boxed{D} = \boxed{3x^2 - xy - 4y^2}$

$E = a(a^2+a)$
$E = a\times a^2 + a\times a$
$\boxed{E} = \boxed{a^3 + a^2}$

4) Si $x = \frac{3}{4}$, alors $2x^2-3x+1 = 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\times\frac{3}{4}+1 = 2\times\frac{9}{16} - \frac{9}{4}+1$

$2x^2-3x+1 = \frac{2\times 9}{2\times 8} - \frac{9}{4}+1 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4}+1 = \frac{9}{8} - \frac{18}{8} + \frac{8}{8} = \boxed{\frac{-1}{8}}$

Or $-\frac{1}{8} \neq 0$, donc le nombre $\frac{3}{4}$ n'est pas solution de l'équation $2x^2-3x+1=0$.

5) L'affirmation est FAUSSE :

Par contre-exemple, prenons les nombres -2 et 1 : On a : $-2<1$ et $(-2)^2 = 4$; $1^2=1$ et $4>1$, donc $(-2)^2 > 1^2$.

Exercice II

Rappel : Pour tous nombres a, b et k on a : $k\times a + k\times b = k(a+b)$.

1) $\boxed{A} = 4x+8 = 4\times x + 4\times 2 = \boxed{4(x+2)}$

$\boxed{B} = 2x^2 - x = 2\times x\times x - 1\times x = \boxed{x(2x-1)}$

$C = (2x+3)(x+11) + (2x+3)^2$
$C = (2x+3)(x+11) + (2x+3)(2x+3)$
$C = (2x+3)\left((x+11)+(2x+3)\right)$
$\boxed{C} = \boxed{(2x+3)(3x+14)}$

$D = 21xy - 3x - 28y + 4$
$D = x(21y-3) - 4\times 7y + 4\times 1$
$D = x(21y-3) - 4(7y-1)$
$D = x\times 3\times(7y-1) - 4(7y-1)$
$\boxed{D} = \boxed{(7y-1)(3x-4)}$

2) E = $\frac{10+0,1}{100} = \frac{10,1}{100} = 0,101.$

Exercice III

Si on choisit 25 en entrée :

25 n'est pas un multiple de 11 : on peut le voir en posant la division de 25 par 11 qui donne 2 comme quotient et 3 comme reste, ou en récitant le début de la table de 11 qui contient les premiers multiples de 11.

On ajoute donc 8 à 25 : 25 + 8 = 33 et 33 = 3$\times$11, donc 33 est un multiple de 11.

On passe donc à la seconde colonne : on soustrait 3 à 33 : 33 – 3 = 30 et 30 =3$\times$10 est un multiple de 3, donc on passe à la troisième colonne et on ajoute 5 à 30 : 30 + 5 = 35 et 35 = 5$\times$7, donc 35 est bien un multiple de 5 : on sort donc du programme, et on obtiendra donc en sortie la valeur 35.

Si on choisit 2 en entrée :

2 n'est pas multiple de 11, donc on lui ajoute 8 et on obtient 10 qui n'est toujours pas multiple de 11. On recommence la boucle en ajoutant 8 autant de fois que nécessaire, jusqu'à obtenir un multiple de 11 :

10 + 8 = 18 non multiple de 11.

18 + 8 = 26 non multiple de 11.

26+8 = 34 non multiple de 11.

34 + 8 = 42 non multiple de 11.

42 + 8 = 50 non multiple de 11.

50+8 = 58 non multiple de 11.

58+8 = 66 qui est multiple de 11 car 66 = 6$\times$11.

On passe à la deuxième colonne en soustrayant 3 à 66 : 66 – 3 = 63 qui est un multiple de 3 car 63 = 21$\times$3.

On passe à la troisième colonne en ajoutant 5 à 63 : 63 + 5 = 68 : ce n'est pas un multiple de 5 car son chiffre des unités est égal à 8, il est donc différent de 0 et 5.

On ajoute 264 à 68 : 68 + 264 = 332 qui n'est pas un multiple de 5.

On recommence en ajoutant 264 à 332 : 332 + 264 = 596 qui n'est pas un multiple de 5.

Enfin, 596 + 264 = 860 qui est bien un multiple de 5 car terminant par 0.

On sort donc du programme, et on obtiendra en sortie la valeur 860.

Exercice IV

1a) $5 \longrightarrow 5^2 = 25 \longrightarrow 25 + 3\times5 = 25+15 = 40 \longrightarrow 40-10 = 30$.

En choisissant 5 en entrée, on obtient 30 en sortie de le programme.

1b) $\underbrace{-4}_{\text{départ}} \longrightarrow (-4)^2 = 16 \longrightarrow 16 + 3\times(-4) = 16-12 = 4 \longrightarrow 4-10 = \underbrace{-6}_{\text{sortie}}$.

2) a) $x \longrightarrow x^2 \longrightarrow x^2+3x \longrightarrow x^2+3x-10$

En choisissant x en entrée, on obtient $x^2+3x-10$ en sortie de programme.

b) Développons l'expression : $(x+5)(x-2) = x^2-2x+5x-10 = x^2+3x-10$.

Ainsi, on a bien, pour tout nombre x, que $x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$.

c) On cherche les valeurs de x telles que $x^2+3x-10=0$.

D'après la question b), cela revient donc à dire que $(x+5)(x-2)=0$.

Or un produit de facteurs est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul (Produit nul).

Donc $(x+5)(x-2)=0$ équivaut à : $x+5=0$ ou $x-2=0$

donc $x=-5$ ou $x=2$.

En choisissant -5 ou 2 au départ, on obtiendra 0 à l'arrivée.

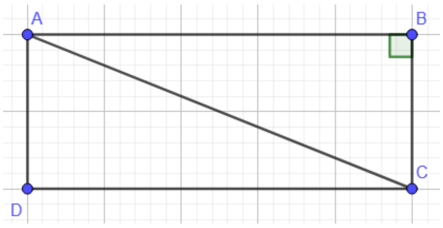
Exercice V

1) Une vitesse moyenne d'au moins 80 km/h signifie une vitesse moyenne supérieure ou égale à 80 km/h.

On additionne donc les effectifs correspondants aux trois rectangles de droite : 15+30+5 = 50 : il y a donc 50 véhicules qui ont une vitesse moyenne d'au moins 80 km/h.

2)

ABCD est un rectangle, donc tous ses angles sont droits, en particulier, le triangle ABC est rectangle en B.



Dans le triangle ABC rectangle en B, e théorème de Pythagore dit que :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$34^2 = 16^2 + BC^2$

$BC^2 = 34^2 - 16^2 = 1156 - 256 = 900$.

Donc comme BC > 0, on a : BC = $\sqrt{900} = 30\ cm$.

Par suite, le périmètre noté p du rectangle ABCD est égal à : p = 2(AB+ BC) = $2\times(16+30) = 2\times46 = 92$ cm.

Exercice VI

Par données, une seule affirmation dit vraie, donc quatre disent faux.

Supposons que l'or soit dans le coffre 1 (on fait un raisonnement par l'absurde) :
Alors l'affirmation inscrite sur le coffre 1 serait vraie, (vu que le coffre contenant l'or a son affirmation vraie), donc l'or serait en 2 ou en 3 : IMPOSSIBLE, car deux coffres contiendraient de l'or !

Donc l'or n'est pas dans le coffre 1, par suite, l'affirmation inscrite sur le coffre 1 est fausse, donc son contraire est vrai, à savoir l'or n'est ni dans le coffre 2 ni dans le coffre 3. (*)

Il ne reste que les coffres 4 et 5 qui peuvent contenir l'or.

Si l'or était dans le coffre n°4, alors l'affirmation inscrite sur le coffre 4 serait vraie, donc le nickel serait en 3, et donc l'affirmation inscrite sur le coffre 3 devrait vrai et donc l'or serait en 2 ce qui est impossible (déjà vu en (*)).

Donc l'or n'est pas dans le coffre 4.

Par suite, $\boxed{\text{l'or est dans le coffre 5}}$ et l'affirmation 5 est vraie,
L'affirmation 3 est fausse, donc le $\boxed{\text{Bronze est dans le coffre 3}}$.
→ Donc $\boxed{\text{Platine dans le coffre 4}}$.

<u>Conclusion</u> **: Coffre 1 : nickel, coffre 2 : argent, coffre 3 : bronze, coffre 4 : platine, coffre 5 : or.**

Exercice facultatif

10^{2023} s'écrit en écriture décimale : 10000…..0 (1 suivi de 2023 zéros).

Le plus simple est donc de poser la soustraction (sans oublier les retenues) :

1 0 0 0 0 ………………………………………… 0 0 0 0

–   2 0 2 3

____

9 9 9 9 9.. . . . . 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 7 9 7 7 (le nombre écrit comporte 2023 chiffres, un de moins que 10^{2023}).

La différence est donc un nombre constitué de 2023 chiffres : les 1999 premiers chiffres de gauche à droite sont des 9, puis il y a le bloc 7977 pour finir.

Ce nombre est donc constitué de 2000 fois le chiffre 9 et de 3 fois le chiffre 7 :

La somme des chiffres de $10^{2023} – 2023$ est donc égale à : $2000\times9+3\times7 = 18021$.