Exercice 1

1) Si $x=-2$, alors $2x^2+3x-2 = 2\times(-2)^2+3\times(-2)-2 = 2\times 4-6-2 = 8-8 = 0$.
donc -2 est solution de l'équation $2x^2+3x-2=0$.

Si $x=\frac{1}{2}=0{,}5$, alors $2x^2+3x-2 = 2\times 0{,}5^2+3\times 0{,}5-2 = 2\times 0{,}25+1{,}5-2 = 2-2=0$.
Donc $x=0{,}5$ est solution de cette équation.

Si $x=1$, alors $2x^2+3x-2 = 2\times 1^2+3\times 1-2 = 3$.
Or $3\neq 0$, donc 1 n'est pas solution de cette équation !

2) a) $x(3-2x) = 3x-2x^2 = -2x^2+3x$.

b) $(2x-1)(x-4) = 2x^2-8x-x+4 = 2x^2-9x+4$

c) $(x+8)^2 = x^2+2\times x\times 8+8^2 = x^2+16x+64$ Rappel : I.R n°1 : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

d) $(3-5x)^2 = 3^2-2\times 3\times 5x+(5x)^2 = 25x^2-30x+9$ IR n°2 : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

$\tilde{d}$) $2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8} = 2\left(x^2+2\times x\times\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)-\frac{1}{8} = 2\left(x^2+\frac{3x}{2}+\frac{9}{16}\right)-\frac{1}{8} = 2x^2+3x+\frac{9}{8}-\frac{1}{8}$

$2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8} = 2x^2+3x+1$

3) i) $5x^2+7x = x(5x+7)$.

ii) $16-y^2 = 4^2-y^2 = (4-y)(4+y) = (y+4)(y-4)$ IR n°3 : $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

iii) $(2p-1)^2-(2-p)^2 \overset{\text{Motif : } a^2-b^2 \text{ avec ici } a=2p-1 \text{ et } b=2-p.}{=} (2p-1+2-p)(2p-1-(2-p)) = (p+1)(2p-1-2+p)$

$(2p-1)^2-(2-p)^2 = (p+1)(3p-3) = 3(p+1)(p-1)$.

Exercice 2

a) $2x-3=3-(x-6)$

$2x-3=3-x+6$

$2x+x=3+6+3$

$3x=12$

$x=\frac{12}{3}=4.$

$S=\{4\}.$

b) $\frac{5x}{2}=\frac{3}{7}$

Technique des produits en croix

$5x\times7=3\times2$

$35x=6$

$x=\frac{6}{35}$

$S=\{\frac{6}{35}\}$

c) $(x-4)^2=11+(6-x)^2$

$x^2-2\times x\times4+4^2=11+6^2-2\times6\times x+x^2$

$\cancel{x^2}-8x+16=\cancel{x^2}-12x+47$

$-8x+12x=47-16$

$4x=31$

$x=\frac{31}{4}$

$S=\{\frac{31}{4}\}$

d) $-3(x-4)<5x+10$

$-3x+12<5x+10$

$-3x-5x<10-12$

$-8x<-2$

$\frac{-8x}{-8}>\frac{-2}{-8}$

On divise les deux membres de l'inégalité par un même nombre NEGATIF donc on change le sens de l'inégalité !

x >0,25 : $\mathscr{S}$=]0,25; +∞[

e) x²=-14 n'a pas de solution réelle car pour tout réel x, x² ⩾ 0 : $S=\emptyset$.

f) $(x+1)(2x-1)=0$ équivaut, d'après le théorème du produit nul à :

$x+1=0$ ou $2x-1=0$

c'est-à-dire : $x=-1$ ou $x=\frac{1}{2}$

$$\boxed{S=\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}}$$

g) $x^2=x \iff x^2-x=0 \overset{\text{FACTORISATION}}{\iff} \underbrace{x(x-1)=0}_{\text{Produit nul}} \iff x=0$ ou $x-1=0$ c'est-à-dire $x=1$

$$\boxed{S=\{0;1\}}$$

⚠ Le "raisonnement" $x^2=x$, donc $\frac{x^2}{x}=1$, donc $x=1$ est FAUX !! quand on divise par x, encore faut-il s'assurer que $x\neq 0$! OR ici 0 est solution triviale de l'équation $x^2=x$.

h) $4x-5x^2=0 \iff x(4-5x)=0 \iff x=0$ ou $4-5x=0 \iff x=0$ ou $x=\frac{4}{5}$

$$\boxed{S=\left\{0;\frac{4}{5}\right\}}$$

g) On sait que le carré de tout réel est positif ou nul.

donc $(2020x+2021)^2\geqslant 0$ et $(2022x+2023)^2\geqslant 0$, par suite :

$(2020x+2021)^2+(2022x+2023)^2\geqslant 0$ (Somme de deux termes positifs ou nuls).

donc $(2020x+2021)^2+(2022x+2023)^2+2024\geqslant 2024>0$.

Par suite, l'équation initiale n'a pas de solution : $S=\emptyset$.

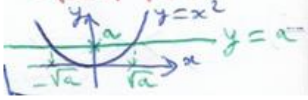
i) 2) $4x^2=3$

$x^2=\frac{3}{4}$

$x=-\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ ou $x=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Rappel : Si $a>0$ l'équation $x^2=a$ possède deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.



j) f) $(2x+3)^2-(5x+1)^2=0$ de la forme : A^2-B^2 avec : $A=2x+3$, $B=5x+1$ et $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ (id. rq. n°3).

$\big((2x+3)+(5x+1)\big)\big((2x+3)-(5x+1)\big)=0$

$(7x+4)(-3x+2)=0$

D'après le théorème du produit nul :

$7x+4=0$ ou $-3x+2=0$

$x=-\frac{4}{7}$ ou $x=\frac{2}{3}$

$S=\left\{-\frac{4}{7};\frac{2}{3}\right\}$.

k)

L'expression $\frac{x-3}{2x-4}$ est calculable (= existe) si et seulement si son dénominateur n'est pas égal à 0.

Or $2x-4=0$ équivaut à $2x=4$, donc $x=2$.

Il faut donc que $x \neq 2$ pour assurer l'existence du membre de gauche.

De même le membre de droite existe si et seulement si $2x-5 \neq 0$ c'est-à-dire si $x \neq \frac{5}{2}$.

Ainsi, on résout l'équation : $\frac{x-3}{2x-4} = \frac{x-2}{2x-5}$ sur $\mathbb{R} - \left\{2 ; \frac{5}{2}\right\}$

Tous les réels sauf 2 et $\frac{5}{2}$

Grâce à la technique des produits en croix on a alors :

$$(x-3)(2x-5) = (x-2)(2x-4) \quad \text{et} \quad x \neq 2 \text{ et } x \neq \frac{5}{2}$$

$$\cancel{2x^2} - 5x - 6x + 15 = \cancel{2x^2} - 4x - 4x + 8 \quad \text{et } x \neq 2 \text{ et } x \neq \frac{5}{2}.$$

$$-11x + 15 = -8x + 8 \quad \text{et } x \neq 2 \text{ et } x \neq \frac{5}{2}.$$

$$-11x + 8x = 8 - 15$$

$$-3x = -7$$

$$x = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

Vu que $\frac{7}{3} \neq 2$ et $\frac{7}{3} \neq \frac{5}{2}$, on a : $\boxed{S = \left\{\frac{7}{3}\right\}}$

i) $\dfrac{2x+1}{x-3} > 1 \underset{\text{équivalent à}}{\Longleftrightarrow} \dfrac{2x+1}{x-3} - 1 > 0 \Longleftrightarrow \underbrace{\dfrac{2x+1}{x-3} - \dfrac{1}{1}}_{\text{réduction à un même dénominateur}} > 0$

$\dfrac{1}{1} = \dfrac{x-3}{x-3}$

$\dfrac{2x+1}{x-3} > 1 \Longleftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-3} - \dfrac{(x-3)}{x-3} > 0$

$\boxed{\dfrac{2x+1}{x-3} > 1} \Longleftrightarrow \dfrac{2x+1-(x-3)}{x-3} > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{2x+1-x+3}{x-3} > 0 \Longleftrightarrow \boxed{\dfrac{x+4}{x-3} > 0}$

Rappelons que deux inéquations équivalentes ont même ensemble de solution.

Ainsi, résoudre : $\dfrac{2x+1}{x-3} > 1$ revient à résoudre : $\dfrac{x+4}{x-3} > 0$.

On fait alors un tableau de signes de ce quotient dont on soit étudier le signe du numérateur et celui du dénominateur : $x+4 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -4$ et $x-3 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 3$.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
Signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{x+4}{x-3}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Grâce à ce tableau :

$\dfrac{x+4}{x-3} > 0 \Longleftrightarrow x < -4$ ou $x > 3$

$S =]-\infty ; -4[\cup]3 ; +\infty[$.

La double barre indique l'interdiction de calculer $\dfrac{x+4}{x-3}$ lorsque $x = 3$.

Exercice 3

$\boxed{A} = (3\sqrt{2})^2 = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 3 \times 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 9 \times 2 = \boxed{18}$

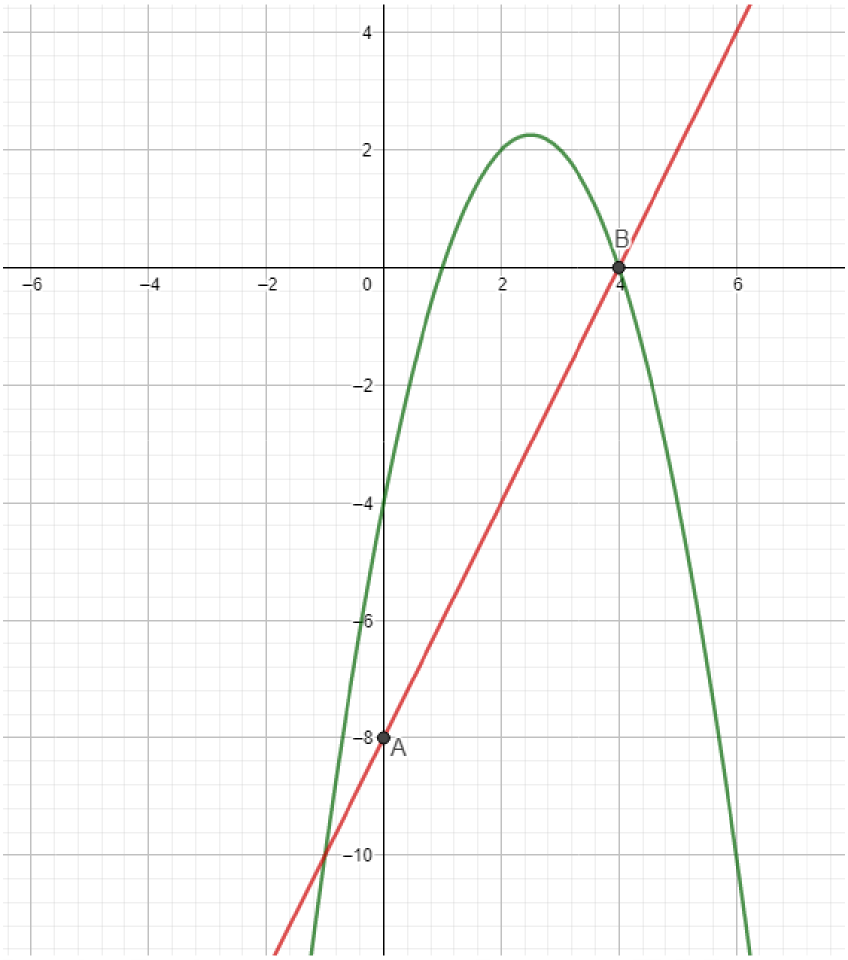
$\boxed{B} = \dfrac{12-\sqrt{40}}{2} = \dfrac{12}{2} - \dfrac{\sqrt{40}}{2} = 6 - \dfrac{\sqrt{4 \times 10}}{2} = 6 - \dfrac{\sqrt{4} \times \sqrt{10}}{2} = 6 - \dfrac{2 \times \sqrt{10}}{2} = \boxed{6 - \sqrt{10}}$

$\boxed{C} = \dfrac{2x+\sqrt{48}}{6} = \dfrac{2x}{6} + \dfrac{\sqrt{16 \times 3}}{6} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{4\sqrt{3}}{6} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \boxed{\dfrac{x+2\sqrt{3}}{3}}$

D = $(2-\sqrt{5})^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$

Exercice 4

1) g est une fonction affine donc C_g est une droite. g(0) = -8 donc C_g passe par le point A(0 ; -8) et g(4) = 0, donc C_g passe par le point B(4 ;0). Le tracé se fait alors directement puisque C_g est la droite (AB) !



2)

x	-1		$2{,}5$		5
$h(x)$	-10	↗	$2{,}25$	↘	-4

3) a) $f(x)=0$ a pour solutions : $x=1$ et $x=4$. $S=\{1;4\}$

(!) IMPORTANT : les solutions de $f(x)=0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses (⟶) !

b) $f(x)=g(x)$ équivaut à : $x=-1$ ou $x=4$: $S=\{-1;4\}$.

⚠ Solutions de $f(x)=g(x)$: abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

c) $\underline{f(x)\leq 0}$ a pour solutions : $S=]-\infty;1]\cup[4;+\infty[$

⚠ Les abscisses de tous les points de $\mathcal{C}_f$ situés au dessous (ou commun) à l'axe des abscisses sont les solutions de l'inéquation $f(x)\leq 0$.

d) $\underline{f(x)>g(x)}$ a pour solutions : $S=]-1;4[$

Solution : les abscisses de tous les points de $\mathcal{C}_f$ situés AU-DESSUS de ceux de $\mathcal{C}_g$.

B– $f(x)=-x^2+5x-4$ et $g(x)=2x-8$.

a) Pour tout réel x, $f(x)-g(x)=-x^2+5x-4-(2x-8)=-x^2+5x-4-2x+8=-x^2+3x+4$

Or, $(x+1)(-x+4)=-x^2+4x-x+4=-x^2+3x+4$.

Ainsi, pour tout réel x, on a bien : $\boxed{f(x)-g(x)=(x+1)(-x+4)}$ (deux quantités égales à une même troisième sont égales).

b) $x+1\geqslant 0 \iff x\geqslant -1$; $-x+4\geqslant 0 \iff 4\geqslant x \iff x\leqslant 4$.

donc :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(x+1)(-x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$f(x)>g(x)$ équivaut à $f(x)-g(x)>0$ et grâce à 2a) et 2b) cela équivaut à dire que : $-1<x<4$

$S=]-1;4[$, on retrouve bien le résultat de A–2d) lu graphiquement.

Exercice 5

a) Pour $x=0$: $a=(0+3)^2=9$

$b=-a=-9$

$c=b+4=-9+4=-5$

Donc $f(0)=-5$.

Pour $x=0$: $a=x+1=0+1=1$

$b=x+5=0+5=5$

$c=-a\times b=-1\times 5=-5$.

donc $g(0)=-5$.

de même, on obtient sans peine que :

$f(-3)=g(-3)=-4$ et $f(1)=g(1)=12$

b) Il semblerait que quelle que soit la valeur de x, on ait : $f(x)=g(x)$.

c) Programme de gauche : $f(x)=(x+3)^2\times(-1)+4=-(x+3)^2+4 \overset{\text{on développe}}{=} -(x^2+6x+9)+4=-x^2-6x-5$

Programme de droite : $g(x)=-(x+1)(x+5)\underset{\text{développer}}{=}-(x^2+x+5x+5)=-x^2-6x-5$ $\quad f(x)=-x^2-6x-5$

Par suite, pour tout réel x, on a bien : $f(x)=g(x)$.