

Exercice I

Pour tout entier naturel n , $u_n = 4n - 7$.

a) on cherche ici u_{15} : $\boxed{u_{15}} = 4 \times 15 - 7 = 60 - 7 = \boxed{53}$

b) Δ de 49^{ième} terme de cette suite, c'est u_{48} car la suite est définie à partir du rang 0 !

$\boxed{u_{48}} = 4 \times 48 - 7 = 192 - 7 = \boxed{185}$

c)

n	0	1	2	3	4
u_n	-7	-3	1	5	9

Il suffit de placer les points : $A_0(0; -7)$; $A_1(1; -3)$; $A_2(2; 1)$; $A_3(3; 5)$ et $A_4(4; 9)$. Ces derniers ont manifestement l'air d'être alignés.

Exercice II

$u_0 = 20$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - (n-4)^2$. (#).

a) $u_0 = 20$

(#) appliquée avec $n=0$ donne : $u_1 = u_0 - (0-4)^2$
 $u_1 = 20 - (-4)^2 = 20 - 16 = \underline{4}$

(#) appliquée avec $n=1$ donne : $u_2 = u_1 - (1-4)^2 = 4 - (-3)^2 = 4 - 9 = \underline{-5}$

(#) appliquée avec $n=2$ donne : $u_3 = u_2 - (2-4)^2 = -5 - (-2)^2 = -5 - 4 = \underline{-9}$

b) $u_{10} = -65$

c) Grâce à la question a), il semblerait que (u_n) soit décroissante.

Rq : $u_4 = -9 = u_3$ (donc pas strictement décroissante).

Pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n - (n-4)^2$, donc $u_{n+1} - u_n = -(n-4)^2$.

Or, pour tout entier n , $(n-4)^2 \geq 0$, donc $-(n-4)^2 \leq 0$, par suite, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et (u_n) décroît.

Exercice III

u_n = nombre d'abonnés n mois après janvier 2019.

a) u_0 = nombre d'abonnés au 01/01/2019 = 750.

b) u_1 = nombre d'abonnés au 01/02/2019.

d'après le modèle : $u_1 = \frac{60}{100} \times u_0 + 100 = 0,6 \times 750 + 100 = 450 + 100 = \underline{550}$.

c) $\boxed{u_{n+1}} = \frac{60}{100} \times u_n + 100 = \boxed{0,6 u_n + 100}$ (pour tout entier naturel n).

d) 01/02/2021 : 25 mois se sont écoulés depuis le 01/01/2019

on cherche donc u_{25} , et à l'aide de la calculatrice, $u_{25} \approx 250$: il y aura 250 abonnés au 01/02/2021.

Exercice IV

a) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$.
 Cet algorithme permet de calculer u_{10} (10 tours de boucle en partant de u_0).

b) Grâce à la question b), l'utilisation de listes nous conduira :
 (u_n) semble être croissante.

Exercice V

1) a) Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2n}{n+2}$.

$$\text{Pour tout entier } n, u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)}{n+1+2} - \frac{2n}{n+2} = \frac{2n+2}{n+3} - \frac{2n}{n+2} = \frac{(2n+2)(n+2)}{(n+3)(n+2)} - \frac{2n(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n^2 + 4n + 2n + 4 - (2n^2 + 6n)}{(n+3)(n+2)} = \frac{2n^2 + 6n + 4 - 2n^2 - 6n}{(n+3)(n+2)} = \frac{4}{(n+3)(n+2)}$$

Or $4 > 0$, $n \in \mathbb{N}$, donc $n \geq 0$, donc $n+3 \geq 3 > 0$ et $n+2 \geq 2 > 0$, donc (règle des signes des produits et quotients)
 on a : $\frac{4}{(n+3)(n+2)} > 0$: $u_{n+1} - u_n > 0$, donc (u_n) est strictement croissante.

b) Pour tout entier n , $v_n = 3^n - 2$.

$$v_{n+1} - v_n = 3^{n+1} - 2 - (3^n - 2) = 3^{n+1} - 2 - 3^n + 2 = 3^{n+1} - 3^n = 3^n(3 - 1) = 2 \times 3^n$$

Or $2 > 0$, $3 > 0$, donc $3^n > 0$ et $2 \times 3^n > 0$, par suite, $v_{n+1} - v_n > 0$: (v_n) est strictement croissante.

c) Pour tout entier n , $w_n = n^2 - 3n + 12$.

$$w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 - 3(n+1) + 12 - (n^2 - 3n + 12)$$

$$w_{n+1} - w_n = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 12 - n^2 + 3n - 12 = 2n - 2$$

$$\text{Or, } 2n - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 1.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $w_{n+1} - w_n \geq 0$, donc (w_n) croît à partir du rang 1.

2) Pour tout entier n , $x_n = \left(\frac{n^2}{n+1}\right)^{n+1}$

$$\text{Pour } n \geq 1: \underline{x_{n-1}} = \left(\frac{(n-1)^2}{n-1+1}\right)^{n-1+1} = \left(\frac{(n-1)^2}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \underline{x_{n+1}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n+2}\right)^{n+2}$$

Exercise VI

① Faux: Si pour tout entier n , $u_n = n^2$, alors $u_{2n} = (2n)^2 = 4n^2$ et $4n^2 \neq 2n^2$!

② $u_0 = 1$ donc $u_1 = u_0 + \frac{1}{0+1} = 1 + \frac{1}{1} = 2$

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{1+1} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$u_3 = u_2 + \frac{1}{2+1} = \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{15}{6} + \frac{2}{6} = \frac{17}{6} : \text{affirmation ② VRAIE.}$$

③ FAUX: Pour que (u_n) soit décroissante, il faut que pour tout entier n , $u_n \geq u_{n+1}$. Ici $u_0 \geq u_1 \geq u_2$ et après? On ne sait rien.

4. VRAI

$$\left. \begin{array}{l} d_{12} = 45 = d_0 + 12R \\ d_{21} = 51 = d_0 + 21R \end{array} \right\} \text{Donc } \begin{array}{l} d_{21} - d_{12} = 21R - 12R = 9R \\ R = \frac{d_{21} - d_{12}}{9} = \frac{51 - 45}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \end{array}$$

Exercise VII

a) $u_0 = 0$; $u_1 = 0$; $u_2 = 2^2 - 2 = 2$

Donc $u_1 - u_0 = 0$ et $u_2 - u_1 = 2$, Ainsi, (u_n) non arithmétique (premiers termes non régulièrement espacés).

b) $v_n = \frac{2n+1}{3}$, donc $v_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{3} = \frac{2n+3}{3}$

Ainsi, pour tout entier n , $v_{n+1} - v_n = \frac{2n+3}{3} - \frac{2n+1}{3} = \frac{2n+3 - (2n+1)}{3} = \frac{2n+3-2n-1}{3}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{3}$$

Donc (v_n) est arithmétique de raison $R = \frac{2}{3}$.

Exercise VIII

(u_n) est arithmétique de raison R .

1) $u_0 = 1$ et $u_{10} = 31 = u_0 + 10R$, donc $31 = 1 + 10R$ et $R = \frac{31-1}{10} = \boxed{3}$

Par suite, $u_n = u_0 + nR$ pour tout entier n , donc pour $n = 2021$: $u_{2021} = u_0 + 2021 \times 3 = 1 + 6063 = \boxed{6064}$

2) ① On cherche ici $u_{311} = u_0 + 311 \times R = 1 + 311 \times 3 = 1 + 933 = \boxed{934}$

3) $v_{17} = 24 = v_0 + 17R$ donc $v_{40} - v_{17} = 40R - 17R = 23R$ et $R = \frac{v_{40} - v_{17}}{23} = \frac{70 - 24}{23}$

$$R = \frac{46}{23} = \boxed{2}$$

et $v_0 = 24 - 17R = 24 - 17 \times 2 = 24 - 34 = \boxed{-10}$

4) $S_{30} = \sum_{k=0}^{30} v_k$ (soit la somme des termes d'une suite arithmétique) $\left(\triangle \text{ Il y a 31 termes dans } \sum_{k=0}^{30} \right)$.

$$S_{30} = \sum_{k=0}^{30} v_k = \frac{v_0 + v_{30}}{2} \times 31$$

$$S_{30} = \frac{-10 + 50}{2} \times 31 = 20 \times 31 = 620.$$

$$v_{30} = v_0 + 30R = -10 + 30 \times 2 = 50$$

5) On cherche $m \in \mathbb{N}$ tel que: $S_m = \sum_{k=0}^m v_k = 312$

Or (v_k) est arithmétique de raison $R=2$ et $v_0 = -10$.

soit $S_m = \frac{v_0 + v_m}{2} \times (m+1)$ avec $v_m = v_0 + mR = -10 + 2m$

soit $312 = \frac{-10 + (-10 + 2m)}{2} \times (m+1)$

$$312 = \frac{-20 + 2m}{2} \times (m+1)$$

$$312 = (-10 + m)(m+1)$$

$$312 = m^2 - 9m - 10 \Leftrightarrow m^2 - 9m - 322 = 0.$$

$a=1; b=-9; c=-322$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 1 \times (-322) = 81 + 1288 = 1369 = 37^2$

$\Delta > 0$, donc:

$$\begin{cases} m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 37}{2} = -14 \\ m_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 37}{2} = 23 \end{cases}$$

Or $m \in \mathbb{N}$, donc $m \geq 0$, et par suite, $m=23$.

Ainsi: $S_{23} = 312$: oui et $m=23$!

Exercice IX

On doit calculer : $S = 13 + 26 + 39 + \dots + n$ où n est le plus grand multiple de 13 inférieur à 9999.

$$\begin{array}{r} 9999 \div 13 \\ 89 \\ 119 \\ \underline{2} \end{array}$$

$$9999 = 13 \times 769 + 2$$

$$\text{donc } \frac{9999 - 2}{13} = 769$$

$$9997 = 13 \times 769$$

$$\text{et } n = 13 \times 769 = 9997$$

$$\text{Ainsi, } S = 13 \times 1 + 13 \times 2 + \dots + 13 \times 769 = 13 (1 + 2 + \dots + 769)$$

Somme de Gauss

$$S = 13 \times \frac{1+769}{2} \times 769$$

$$S = 13 \times \frac{770}{2} \times 769 = 13 \times 385 \times 769 = \boxed{3848845}$$

Exercice X

a) La suite qui intervient et qui correspond à la variable U est la suite récurrente définie par :

$$U_0 = 1 \text{ et par tout entier naturel } n, U_{n+1} = U_n + 3.$$

Cette suite est donc une suite arithmétique de raison $R = 3$ et de premier terme $U_0 = 1$.

b) Cet algorithme permet de calculer la somme : $S_n = \sum_{k=0}^n U_k (= U_0 + U_1 + \dots + U_n)$, pour n choisi par l'utilisateur.

nombre (11) donné par affichage : 210

Exercice XI

On passe du nombre d'allumettes nécessaires pour construire un étage au suivant en rajoutant 4 allumettes (2 de chaque côté) au nombre d'allumettes de l'étage précédent.

Soit la suite (u_n) dont u_n représente le nombre d'allumettes nécessaires pour construire le n^{e} étage. (u_n) est alors une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_1 = 3$.

$$\text{On a donc } u_n = 3 + 4(n - 1)$$

Soit S_n le nombre d'allumettes nécessaires pour construire n étages.

$$\text{On a donc } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

On peut proposer l'algorithme suivant :

$$\text{On trouve alors } N = 72 \text{ et } S = 10\,440$$

On peut donc faire 72 étages avec 10 440 allumettes et il ne reste plus d'allumettes.

Variables : N, U, S entiers	
Entrées et initialisation	
1	$\rightarrow N$
3	$\rightarrow U$
3	$\rightarrow S$
Traitement	
tant que $S < 10\,440$ faire	
	$N + 1 \rightarrow N$
	$U + 4 \rightarrow U$
	$S + U \rightarrow S$
fin	
Sorties : Afficher N, S	

Par le calcul

$$S_n = 10\,440 \Leftrightarrow n \times \frac{u_1 + u_n}{2} = 10\,440 \Leftrightarrow n[3 + 3 + 4(n-1)] = 20\,880 \Leftrightarrow$$

$$6n + 4n(n-1) = 20\,880 \Leftrightarrow 4n^2 + 2n - 20\,880 = 0 \Leftrightarrow 2n^2 + n - 10\,440 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 \times 10\,440 = 83\,521 = 289^2,$$

$$\text{la racine positive est alors } n = \frac{-1 + 289}{4} = 72$$

On peut donc construire 72 étages avec 10 440 allumettes.

Exercice XII

$n \geq 2$.

$$1) p_2 = 1; p_3 = 3; p_4 = 6; p_5 = 10$$

2) On ajoute n nouveaux segments (on relie le point ajouté à chacun des n autres déjà existents).

$$\text{on a donc : } p_{n+1} = p_n + n \quad (*)$$

$$3a) \quad p_2 = 1$$

$$p_3 = p_2 + 2$$

$$p_4 = p_3 + 3$$

$\vdots$

$$p_n = p_{n-1} + n-1$$

} suite à (*) successivement appliquée à : $n=1$ puis $n=2$ --- puis à l'entier $n-1$.

3b)

$$p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1 + (p_2 + 2) + (p_3 + 3) + \dots + (p_{n-1} + n-1)$$

$$\cancel{p_2} + \cancel{p_3} + \dots + \cancel{p_n} = (1 + 2 + \dots + n-1) + \cancel{p_2} + \cancel{p_3} + \dots + \cancel{p_{n-1}}$$

$$p_n = 1 + 2 + \dots + n-1 = \sum_{k=1}^{n-1} k \quad (\text{somme de Gauss})$$

$$\boxed{p_n} = \frac{1+n-1}{2} \times (n-1) = \boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$$