

Exercice I

- a) Par limite de référence du cours sur les croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0$$

⇒ Donc par limite de référence et de produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x e^x = 0$

- b) On a une forme indéterminée en $+\infty$ par somme pour $2x - e^x$!

On factorise par x : $2x - e^x = x \left(2 - \frac{e^x}{x} \right)$

- Par limites de référence : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

- Par limite de somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty$

⇒ Donc par limite de produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - e^x) = -\infty$ *Oui*

- c) On a une forme indéterminée en $+\infty$ par produit pour $x e^{-x}$!

Or, $x e^{-x} = x \times \frac{1}{e^x} = \frac{x}{e^x}$, et par limite de référence du cours on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Or, $\frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$, donc par limite de quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x}) = 0$ *Oui*

- d) On a une forme indéterminée en $+\infty$ par quotient pour $\frac{e^x}{2x^2}$:

Or, $1 + \frac{e^x}{2x^2} = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{e^x}{x^2}$ *Oui*

- Par limite de référence du cours sur les croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

- Par limite de produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \times \frac{e^x}{x^2} \right) = +\infty$

⇒ Donc par limite de somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{e^x}{x^2} \right) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{2x^2} \right) = +\infty$ *Oui*

- e) La fonction sinus n'a pas de limite en $-\infty$!

Or $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$

donc $-e^x \leq e^x \sin(x) \leq e^x$ car $e^x > 0$

donc $1 - e^x \leq 1 + e^x \sin(x) \leq 1 + e^x$

- Par limite de référence : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$

- Donc par limite de somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x) = 1$

⇒ Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x \sin(x)) = 1$$

Exercice II

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 2}{e^{3x} + 1}, \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

* Limite de f en +∞:

On a une forme indéterminée pour le quotient donc on factorise:

$$\frac{e^{2x} - 2}{e^{3x} + 1} = \frac{e^{2x} \left(1 - \frac{2}{e^{2x}}\right)}{e^{2x} \left(e^x + \frac{1}{e^{2x}}\right)} = \frac{1 - \frac{2}{e^{2x}}}{e^x + \frac{1}{e^{2x}}} \quad \text{On'}$$

• Par limite de produit et de référence: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

donc par limite de fonction composée: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$ On'

• Par limite de quotient on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{2x}} = 0$

• Par limites de référence et de somme on obtient:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{e^{2x}}\right) = 1 \quad \text{On' et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x + \frac{1}{e^{2x}}\right) = +\infty \quad \text{On'}$$

⇒ Donc par limite de quotient: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

→ La droite d'équation $y = 0$ (soit l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$ On'

* Limite de f en -∞:

• Par limite de référence et de produit: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

donc par limite de fonction composée: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$

De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = 0$

• Par limite de somme on a: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{3x} + 1) = 1$

⇒ Donc par limite de quotient: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$

→ La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de $-\infty$. On'

$$f) \frac{e^{0,1x}}{2x} = \frac{e^{0,1x}}{0,1x} \times \frac{0,1}{2} = 0,05 \frac{e^{0,1x}}{0,1x}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,1x = +\infty$, et par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

donc par limite de produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{0,1x}}{0,1x} = +\infty$ et par limite de produit ($0,05 > 0$) on a:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,05 \frac{e^{0,1x}}{0,1x} = +\infty, \text{ donc } \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{0,1x}}{2x} = +\infty \right]$$

Exercice III

$$v(t) = 9,81 \frac{m}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \text{ sur } [0; +\infty[$$

1) La fonction v est dérivable sur $[0; +\infty[$ et est de la forme $v(t) = k u(t)$

avec $k = 9,81 \frac{m}{k}$ (car k et m sont des constantes) et $u(t) = 1 - e^{-\frac{k}{m}t}$

$$u'(t) = \frac{k}{m} e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v'(t) = k u'(t) = 9,81 \frac{m}{k} \times \frac{k}{m} e^{-\frac{k}{m}t} = 9,81 e^{-\frac{k}{m}t}$$

Étudions le signe de $v'(t)$

Pour tout $t \in [0; +\infty[$, $e^t > 0$ donc $e^{-\frac{k}{m}t} > 0$ et $9,81 > 0$

Donc pour tout $t \in [0; +\infty[$, $v'(t) > 0$

3/19

Donc d'après le théorème de Lagrange, la fonction v associée à la vitesse de la goutte d'eau croît sur $[0; +\infty[$. On a :

t	0	$+\infty$
signe de $v'(t)$		+
variation de $v(t)$	0	$9,81 \frac{m}{k}$

$$v(0) = 9,81 \frac{m}{k} (1 - e^0) = 0$$

(vitesse initiale nulle)

2) Par limite de référence et de produit

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{k}{m}t\right) = +\infty$ et $\lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-T} = 0$, donc par limite de fonction composée :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = 0$$

• Par limite de somme : $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = 1$

⇒ donc par limite de produit : $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81 \frac{m}{k}$

3) - La vitesse de la goutte dépasse 99% de sa vitesse limite signifie que la vitesse est supérieure à $9,81 \frac{m}{k} \times 0,99$ ($\approx 9,71 \frac{m}{k}$)

- Calculons désormais la vitesse au bout d'une durée de chute égale à $5 \frac{m}{k}$:

$$v\left(5 \frac{m}{k}\right) = 9,81 \frac{m}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m} \times \frac{5m}{k}}) = 9,81 \frac{m}{k} (1 - e^{-5})$$

$$\text{Or } 1 - e^{-5} \approx 0,993 \text{ donc } v\left(5 \frac{m}{k}\right) \approx 9,81 \frac{m}{k} \times 0,993 \left(\approx 9,74 \frac{m}{k}\right)$$

- $0,993 > 0,99$, donc $9,81 \frac{m}{k} \times 0,993 > 9,81 \frac{m}{k} \times 0,99$

⇒ Donc l'affirmation est correcte

4) a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81 \frac{m}{k}$

Donc la droite (d) d'équation $y = 9,81 \frac{m}{k}$ est asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.

b) La tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0, notée T_0 a pour équation : $y = v'(0)(x - 0) + v(0)$ avec $v(0) = 0$

$$\text{donc } y = x \times v'(0) = x \times 9,81 e^0 = 9,81x$$

c) Point d'intersection de T et d : $M(x_M; y_M)$

$$\text{On a alors } y_M = 9,81 \frac{m}{k} \text{ et } y_M = 9,81x_M$$

$$\text{donc } 9,81 \frac{m}{k} = 9,81x_M \Leftrightarrow x_M = \frac{m}{k}$$

L'abscisse du point d'intersection est $\frac{m}{k}$

5) $\frac{m}{k}$ est l'abscisse du point d'intersection des droites d et T.

graphiquement on lit que $\frac{m}{k}$ vaut 1,5

4/19

Exercice III

a) $f(x) = 3$ n'a aucune solution sur $[-2, 8]$ car d'après le tableau de variation de f , la valeur maximale prise par f sur $[-2, 8]$ est 2, et $2 < 3$.

b) *) f est continue sur $[-8, -2]$ puisqu'il y a une flèche dans le tableau de variation sur cet intervalle.

***) f est strictement décroissante sur $[-8, -2]$ d'après le tableau de variation.

***) $3 \in [-4, 5]$

⇒ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

$f(x) = 3$ admet une unique solution sur $[-8, -2]$.

c) *) f est continue sur $[-8, -2]$.

***) f est strictement décroissante sur $[-8, -2]$.

***) $0 \in [-4, 5]$

⇒ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-8, -2]$.

*) f est continue sur $[-2, 3]$ d'après le tableau de variation.

***) f est strictement croissante sur $[-2, 3]$ d'après le tableau de variation.

***) $0 \in [-1, 2]$

⇒ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-2, 3]$.

• f est continue sur $[3, 8]$ et est strictement croissante sur $[3, 8]$.

Mais $0 \notin [-1, 2]$

→ donc $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[3, 8]$.

⇒ On aboutit à $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[-8, 8]$.

Exercice II

$$f(x) = \frac{3}{-1 + e^{-2x}} \text{ sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \Delta: y = 3$$

a) La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3}{1+e^{-2x}}$
 C'est un quotient de fonction dérivable sur \mathbb{R} et $1+e^{-2x}$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} , donc la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

Donc par théorème la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

b) Cette fonction est de la forme $f(x) = k \cdot \frac{1}{u}$ avec $\begin{cases} u(x) = 1+e^{-2x} \\ u'(x) = -2e^{-2x} \end{cases}$

$$f'(x) = k \times \frac{-u'(x)}{u^2(x)} = 3 \times \frac{2e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{6e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$$

Étudions le signe de $f'(x)$:

$\forall x \in \mathbb{R}, (1+e^{-2x})^2 > 0$ et $e^{-2x} > 0$ donc $6e^{-2x} > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ (oui)

Donc d'après le théorème de Lagrange f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f'(x)$		+
variation de $f(x)$	0	→ 3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

c) On cherche $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

• Par limites de référence: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

• Par limite de produit: $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty$

et par limite de référence: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

donc par limite de fonction composée: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$

• Par limite de somme: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+e^{-2x}) = 1$ (oui)

⇒ Donc par limite de quotient: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

→ La droite Δ d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$ (oui)

d) *) f est continue sur $]-\infty; +\infty[$, car elle est dérivable sur \mathbb{R} .

***) f est strictement croissante sur \mathbb{R} ; donc sur $]-\infty; +\infty[$.

****) $2,999 \in]0; 3[$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

$f(x) = 2,999$ admet une unique solution sur \mathbb{R} . On la note α : $f(\alpha) = 2,999$ (oui)

e) Avec la calculatrice T.I on obtient :

Avec un pas égal à 1 :		Avec un pas égal à 0,1 :		Avec un pas égal à 0,01 :	
x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
4	2,93899 ✓	4,0	2,93899 ✓	4,00	2,93899 ✓
α	2,939 ✓	α	2,939 ✓	α	2,939 ✓
5	2,95986 ✓	4,1	2,95917 ✓	4,01	2,95901 ✓
$4 < \alpha < 5$ ✓		$4,0 < \alpha < 4,1$ ✓		$4,00 < \alpha < 4,01$ ✓	

→ $4,00 < \alpha < 4,01$ est un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Exercice VI

0. (C1) représente la courbe de l'exponentielle car ne prend que des valeurs positives, tandis que (C2) représente la courbe de la fonction trinôme, qui elle ne prend que des valeurs négatives ($-x^2 - 1 < 0$).

On considère les deux courbes (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.

- Lecture graphique de l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (\mathcal{C}_1) : $a \approx 0,8$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (\mathcal{C}_2) : $b \approx -1,2$.
- On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe (\mathcal{C}_1) et par B le point d'abscisse b de la courbe (\mathcal{C}_2).

On a alors : A($a; e^a$) et B($b; -b^2 - 1$).

- (a) Équation de la tangente (\mathcal{T}_A) à la courbe (\mathcal{C}_1) au point A :

$$y - e^a = e^a(x - a) \iff y = e^a x + e^a(1 - a)$$

- (b) Équation de la tangente (\mathcal{T}_B) à la courbe (\mathcal{C}_2) au point B :

$$y - (-b^2 - 1) = -2b(x - b) \iff y = (-2b)x + b^2 - 1$$

- (c) (\mathcal{T}_A) = (\mathcal{T}_B). En identifiant terme à terme les deux équations, on obtient :

$$(\mathcal{T}_A) = (\mathcal{T}_B) \iff (S) : \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a(1 - a) = b^2 - 1 \end{cases}$$

- (d) Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') :

$$(S) \iff \begin{cases} b = -\frac{e^a}{2} \\ e^a(1 - a) = \left(-\frac{e^a}{2}\right)^2 - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -\frac{e^a}{2} \\ 4e^a(1 - a) = (e^a)^2 - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$$

3. (E) : $e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0$.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$.

- (a) Sur $] -\infty ; 0[$, la fonction $x \rightarrow e^{2x}$ est croissante et strictement positive, donc :

$$(e^{2x} \leq e^{2 \times 0} = 1 < 4 \implies e^{2x} - 4 < 0) \text{ et } (x \in] -\infty ; 0[\iff x < 0 \iff x - 1 < -1 < 0 \implies 4e^x(x - 1) < 0)$$

- (b) L'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $] -\infty ; 0[$, car sur cet intervalle, $e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 < 0$.

- (c) La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, car sa dérivée est positive :

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x + 4xe^x - 4e^x = 2e^{2x} + 4xe^x > 0 \text{ (somme de nombres strictement positifs)}$$

(d) Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0; +\infty[$. En effet :

$$f(0) = -7 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(1 + 4 \frac{x}{e^x} - \frac{4}{e^x} - \frac{4}{e^{2x}} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^{2x}} = 0 \text{ (} n=1 \text{ ou } 2 \text{)}$$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$; elle réalise donc une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[-3; +\infty[$.

Or $0 \in [-3; +\infty[$, donc 0 possède un unique antécédent, noté a vérifiant $f(a) = 0$.

Encadrement d'amplitude 10^{-2} de a (en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires) :

$$f(0,84) \approx -0,117 \text{ et } f(0,85) \approx 0,07 \implies 0,84 \leq a \leq 0,85$$

4. On prend pour A le point d'abscisse a . Encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites (\mathcal{F}_A) et (\mathcal{F}_B) sont confondues :

$$0,84 \leq a \leq 0,85 \iff 2,31 < e^{0,84} \leq e^a \leq e^{0,85} < 2,34 \iff 1,155 \leq \frac{e^x}{2} \leq 1,17 \iff -1,2 \leq b = -\frac{e^x}{2} \leq -1,1$$

BONUS

I- $f: [0;1] \rightarrow [0;1]$ est continue.

Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par : $g(x) = f(x) - x$

*i) g est continue sur $[0;1]$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $[0;1]$.

*ii) $g(0) = f(0)$ et f est à valeurs dans $[0;1]$, donc $\forall x \in [0;1], 0 \leq f(x) \leq 1$

donc $f(0) \geq 0$, donc $\boxed{g(0) \geq 0}$

$g(1) = f(1) - 1$ et $f(1) \leq 1$ donc $f(1) - 1 \leq 0$.

En suite, $\boxed{g(1) \leq 0}$

①, ② et ③ font qu'on peut appliquer le TVI à $g: 0 \in [g(1); g(0)]$, donc

d'après le TVI, $g(x) = 0$ a au moins une solution sur $[0;1]$, c'est à dire

$f(x) - x = 0$ a au moins une solution sur $[0;1]$ et donc idem pour $f(x) = x$.

Conclusion: f a au moins un point fixe sur $[0;1]$.

II-

f est définie sur $[a; b]$ ce qui signifie que l'on peut calculer $f(t)$ pour tout réel t appartenant à $[a; b]$.

o) Soit $t \in [a; \frac{a+b}{2}]$: alors : $a \leq t \leq \frac{a+b}{2}$

$$\text{donc : } a + \frac{b-a}{2} \leq t + \frac{b-a}{2} \leq \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}$$

$$\text{donc : } \frac{2a + (b-a)}{2} \leq t + \frac{b-a}{2} \leq \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}$$

$$\text{donc } \frac{a+b}{2} \leq t + \frac{b-a}{2} \leq b$$

$$\text{donc } \frac{a+b}{2} \leq t + \frac{b-a}{2} \leq b$$

Voilà $a \leq \frac{a+b}{2}$ (car $2a \leq a+b$ vu que $a \leq b$) les valeurs prises par $t + \frac{b-a}{2}$, lorsque $t \in [a; \frac{a+b}{2}]$

restent comprises dans $[\frac{a+b}{2}; b]$, intervalle contenu dans $[a; b]$ sur lequel f est bien définie.

donc f est bien définie sur $[a; \frac{a+b}{2}]$.

$$1) [a; \frac{a+b}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t).$$

$$g(a) = f(a + \frac{b-a}{2}) - f(a) = f(\frac{2a+b-a}{2}) - f(a) = f(\frac{a+b}{2}) - f(a).$$

$$g(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}) - f(\frac{a+b}{2}) = f(b) - f(\frac{a+b}{2}) = f(a) - f(\frac{a+b}{2}) \text{ car } f(a) = f(b)!$$

* g est définie sur $[a; \frac{a+b}{2}]$ et continue sur cet intervalle (somme et composée de fonctions continues).

** $g(a) = -g(\frac{a+b}{2})$ d'après les calculs précédents.

donc $f(a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$ sont de signes contraires. Sans perte de généralité, supposons $f(a) \geq 0$ et $f(\frac{a+b}{2}) \leq 0$.

$$\text{d'où } 0 \in [f(\frac{a+b}{2}); f(a)]$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins

un intervalle par g sur $[a; \frac{a+b}{2}]$ i.e. l'équation $g(t) = 0$ admet au moins une solution sur

$[a; \frac{a+b}{2}]$, donc f s'annule au moins une fois sur $[a; \frac{a+b}{2}]$.

2) Cette question est plus difficile :

Notons $f(t)$ la distance parcourue par le marcheur ($0 \leq t \leq 1$) : on a $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$!

Soit g la fonction définie sur $[0; \frac{1}{2}]$ par : $g(t) = f(t + \frac{1}{2}) - f(t)$.

g est continue sur $[0; \frac{1}{2}]$ car f l'est (cf. question 1).

$$\text{de plus : } \begin{cases} g(0) = f(\frac{1}{2}) - f(0) = f(\frac{1}{2}) \\ g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = 4 - f(\frac{1}{2}) \end{cases}$$

de deux choses l'une : Au cours de sa première demi-heure de marche, soit il parcourt moins de 2 km, soit il parcourt au moins 2 km.

* Si il parcourt moins de 2 km sur l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$, on a donc $f(t) < 2$ si $t \in [0; \frac{1}{2}]$

$$\text{d'où } 4 - f(\frac{1}{2}) > 2$$

En suite, des 6 cas on a : $\begin{cases} g(0) = f(\frac{1}{2}) < 2 \\ g(\frac{1}{2}) = 4 - f(\frac{1}{2}) > 2 \end{cases}$ OR g est continue sur $[0; \frac{1}{2}]$, donc
 et $2 \in]g(0); g(\frac{1}{2})[$

D'après le théorème de valeurs intermédiaires, il existe $\tau \in]0; \frac{1}{2}[$ tel que : $g(\tau) = 2$.

En suite, $g(\tau) = \boxed{2 = f(\tau + \frac{1}{2}) - f(\tau)}$

soit $\tau + \frac{1}{2} - \tau = \frac{1}{2}$ heure, le marcheur aura donc parcouru exactement 2 km!

**) s'il partait au max 2 km dans la première demi-heure : $f(t) \geq 2$ si $t \in [0; \frac{1}{2}]$.

donc $f(\frac{1}{2}) \geq 2$ et $4 - f(\frac{1}{2}) \leq 2$.

de même : $\begin{cases} g(0) = f(\frac{1}{2}), \text{ donc } g(0) \geq 2 \\ g(\frac{1}{2}) = 4 - f(\frac{1}{2}), \text{ donc } g(\frac{1}{2}) \leq 2 \end{cases}$. Comme précédemment, g continue sur $[0; \frac{1}{2}]$

et $2 \in [g(\frac{1}{2}); g(0)]$, donc G.T.V.I avec l'existence d'un réel $\tau' \in [0; \frac{1}{2}]$ tel que

$g(\tau') = 0 \Leftrightarrow \underline{f(\tau' + \frac{1}{2}) - f(\tau') = 2}$

Dans le laps de temps d'ordre - deux $(\tau' + \frac{1}{2} - \tau')$ il aura exactement parcouru 2 km.
 Dans tous les cas de figure, on a bien trouvé un intervalle d'implémentation $\frac{1}{2}^n = 30 \text{ min}$ en lequel il parcourt exactement 2 km!!
 Voici un très joli exercice, DIFFICILE! Bravo si vous l'avez trouvé tout seul.