Première Maths Groupe 4 **Corrigé du DM 11** **Avril 2023**

Exercice I

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 2200$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + \frac{15}{100} \times b_n - \frac{10}{100} a_n$.

$a_{n+1} = 0{,}9 a_n + 0{,}15 b_n$.

Or, d'après 1), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 2200 - a_n$, de sorte que :

$a_{n+1} = 0{,}9 a_n + 0{,}15(2200 - a_n) = 0{,}9 a_n + 330 - 0{,}15 a_n$.

$a_{n+1} = 0{,}75 a_n + 330$.

3)

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - 1320$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a_{n+1} - 1320 \overset{\text{question 2)}}{=} 0{,}75 a_n + 330 - 1320 = 0{,}75 a_n - 990$.

$u_{n+1} = 0{,}75\left(a_n - \frac{990}{0{,}75}\right) = 0{,}75(\underbrace{a_n - 1320}_{= u_n})$.

$u_{n+1} = 0{,}75 u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique, de raison $Q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $u_0 = a_0 - 1320$

$u_0 = 800 - 1320 = -520$.

b) Vu que (u_n) est géométrique, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 \times Q^n$.

Donc $\boxed{u_n = -520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - 1320$, donc $a_n = u_n + 1320 = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - \left(1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

$a_{n+1} - a_n = -520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

$a_{n+1} - a_n = 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \left[-\frac{3}{4} + 1\right] = 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{1}{4} = 130 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Or $130 > 0$, et $\frac{3}{4} > 0$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n > 0$, par suite, (a_n) est strictement croissante.

6a) Il semblerait que (a_n) converge et que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 1320}$ (cf. tableur ou calculatrice).

6b) Concrètement, à très long terme, le volume d'eau du bassin A va se stabiliser à 1320 m^3.

6)

```
def seuil():

n=0
a=800
while a<=1100:
    a=3/4*a+330
    n=n+1
return(n)
```

Il renvoie 3 en sortie.

Exercice II

$\boxed{A} = e^4 \times e^{-5} = e^{4+(-5)} = \boxed{e^{-1}} \left(= \frac{1}{e}\right)$; $\boxed{B} = \left(e^{-2}\right)^3 = e^{-2\times 3} = \boxed{e^{-6}}$; $\boxed{C} = \frac{e^3}{e^{-2} \times e} = \frac{e^3}{e^{-2+1}} = \frac{e^3}{e^{-1}} = e^{3-(-1)} = \boxed{e^4}$

$\boxed{D} = \frac{1}{\left(e^{-3}\right)^2} + \frac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^{-6} \times e^2} = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-6+2}} = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} = \boxed{e^6 + 1}$

$\boxed{E} = \left(e^2\right)^3 \sqrt{16e} = e^6 \times \sqrt{16} \times \sqrt{e} = e^6 \times 4 \times e^{\frac{1}{2}} = 4e^{6+\frac{1}{2}} = 4e^{\frac{13}{2}} = \boxed{4\sqrt{e^{13}}}$.

$\boxed{F} = \frac{\left(e^{4a}\right)^3 \times e^a}{\left(e^a\right)^9} = \frac{e^{12a} \times e^a}{e^{9a}} = \frac{e^{13a}}{e^{9a}} = e^{13a-9a} = \boxed{e^{4a}}$

$G = \left(e^a - e^{-a}\right)^2 - e^{-a}\left(e^{3a} + e^{-a}\right)$

$G = \left(e^a\right)^2 - 2e^a e^{-a} + \left(e^{-a}\right)^2 - e^{-a} \times e^{3a} - e^{-a} \times e^{-a}$

$G = \cancel{e^{2a}} - 2 + \cancel{e^{-2a}} - \cancel{e^{2a}} - \cancel{e^{-2a}}$

$\boxed{G} = \boxed{-2}$

Exercice III

1) Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $e^x + e^{-x} > 0$ et $e^x + e^{-x} \neq 0$.

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\cancel{e^x}(1 - e^{-2x})}{\cancel{e^x}(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

2)

a) $e^{3x-1} = e^1 \iff 3x - 1 = 1 \iff 3x = 2 \iff x = \frac{2}{3}$ $\boxed{S = \left\{\frac{2}{3}\right\}}$.

b) $e^{4x+1} = \frac{1}{e} \iff e^{4x+1} = e^{-1} \iff 4x + 1 = -1 \iff 4x = -2 \iff x = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ $\boxed{S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$

c) $(e^{-x} - e)(e^x + 1) = 0 \overset{\text{produit nul}}{\iff} \begin{cases} e^{-x} - e = 0 \\ \text{ou} \\ e^x + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{-x} = e^1 \\ \text{ou} \\ \underbrace{e^x = -1}_{\text{Pas de solution car pour tout réel } x,\ e^x > 0.} \end{cases} \iff e^{-x} = e^1 \iff -x = 1$

$\iff x = -1$

$\boxed{S = \{-1\}}$

d) $e^{-\frac{1}{4}x+1} - 1 = 0 \iff e^{-\frac{1}{4}x+1} = 1 = e^0 \iff -\frac{1}{4}x + 1 = 0 \iff \frac{1}{4}x = 1 \iff x = 4$ $\boxed{S = \{4\}}$

e) $e^{x^2} = e^{x+1} \iff x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$ (équation du 2^e degré avec : $a = 1$; $b = c = -1$).

2

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times1\times(-1) = 1+4 = 5.$

$\Delta > 0$, donc deux solutions : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$.

f) $e^{3x} > 1 \iff e^{3x} > e^0 \iff 3x > 0 \iff x > \frac{0}{3} \iff x > 0.$ $\boxed{\mathcal{S} =]0;+\infty[}$.

g) $3xe^{-x} - e^{-x} \geq 0 \iff e^{-x}(3x-1) \geq 0 \iff 3x-1 \geq 0$ car $e^{-x} > 0$ pour tout réel x !
$\iff x \geq \frac{1}{3}$ $\boxed{\mathcal{S} = [\frac{1}{3};+\infty[}$.

h) On va faire un tableau de signes de ce quotient.

Au préalable : $e^x - e \geq 0 \iff e^x \geq e \iff e^x \geq e^1 \iff x \geq 1$

et $e^{x+4} - 1 \geq 0 \iff e^{x+4} \geq 1 \iff e^{x+4} \geq e^0 \iff x+4 \geq 0 \iff x \geq -4.$

D'où :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
Signe de $e^x - e$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $e^{x+4} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{e^x - e}{e^{x+4} - 1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\dfrac{e^x - e}{e^{x+4} - 1} \geq 0 \iff x \in]-\infty;-4[\cup [1;+\infty[.$ $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty;-4[\cup [1;+\infty[}$.

i) $e^x - 5e^{-x} + 4 \leq 0 \iff e^x - \dfrac{5}{e^x} + 4 \leq 0 \iff \dfrac{e^{2x}}{e^x} - \dfrac{5}{e^x} + \dfrac{4e^x}{e^x} \leq 0$

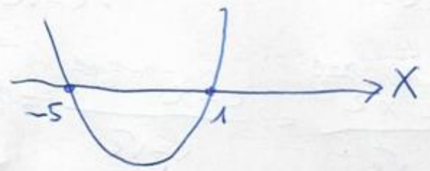
$\iff \dfrac{e^{2x} + 4e^x - 5}{e^x} \leq 0 \iff e^{2x} + 4e^x - 5 \leq 0 \times e^x$ car $e^x > 0$ pour tout réel x.

$e^x - 5e^{-x} + 4 \leq 0 \iff e^{2x} + 4e^x - 5 \leq 0 \iff (e^x)^2 + 4e^x - 5 \leq 0.$

Posons $X = e^x$: on a alors : $X^2 + 4X - 5 \leq 0$

$X = 1$ et $X = -5$ sont les racines évidentes du trinôme $X^2 + 4X - 5$ (faire Δ sinon).

$a=1$, donc $a>0$ donc : 3



$X^2+4X-5 \leq 0 \iff -5 \leq X \leq 1$.

Or, $X=e^x$, donc : $-5 \leq X \leq 1 \iff -5 \leq e^x \leq 1 \iff (0<) e^x \leq 1 \iff e^x \leq e^0$
Car $e^x > 0$ pour tout réel x $\iff x \leq 0$.

$\boxed{S =]-\infty ; 0]}$

Exercice IV

(u_n) est arithmétique de raison $R=-0,5$, donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 0,5$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^{-u_n}$, donc $v_{n+1} = e^{-u_{n+1}} = e^{-(u_n - 0,5)} = e^{-u_n + 0,5} = e^{-u_n} \times e^{0,5}$

$$\boxed{v_{n+1}} = v_n \times e^{0,5} = \boxed{\sqrt{e} \times v_n}.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \sqrt{e}$.

Son premier terme est $v_0 = e^{-u_0} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

Exercice V

Exercice VII

Pour tout réel x, $f(x) = (2x-3)e^{0,5x}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit (et composée) de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f = uv$ avec : $\begin{cases} u(x) = 2x-3 \\ u'(x) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^{0,5x} \\ v'(x) = 0,5e^{0,5x} \end{cases}$ ⚠ $(e^{ax})' = ae^{ax}$ où $a \in \mathbb{R}$.

Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$f'(x) = 2e^{0,5x} + (2x-3) \times 0,5e^{0,5x}$

$f'(x) = e^{0,5x}(2 + (2x-3) \times 0,5) = e^{0,5x}(2 + x - 1,5) = (x+0,5)e^{0,5x}$.

Étude du signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$: Pour tout réel x, $e^{0,5x} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+0,5$. Ainsi, $f'(x) \geq 0 \iff x+0,5 \geq 0 \iff x \geq -0,5$.

D'où :

x	$-\infty$		$-0,5$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$-4e^{-0,25}$	$\nearrow$	

$g(-0,5) = (2\times(-0,5)-3)\,e^{0,5\times(-0,5)}$

$g(-0,5) = -4e^{-0,25} = \dfrac{-4}{e^{0,25}}$

Exercice VI

Le point A appartenant à la courbe représentative de f, on a $f(0) = 10$ soit $(a \times 0 + b)e^{k\times 0} = 10$ d'où $b = 10$.
Calculons la fonction dérivée de f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{kx} + (ax+10) \times ke^{kx} = e^{kx}(a + k(ax+10)) \\ &= e^{kx}(kax + a + 10k) \end{aligned}$$

On sait d'une part que la tangente à la courbe représentative de f en A est parallèle à la droite d'équation $y = -5x$. Comme le coefficient directeur de cette tangente est $f'(0)$, on en déduit que $f'(0) = -5$ soit $e^{k\times 0}(ka \times 0 + a + 10k) = -5$. Ainsi $a + 10k = -5$.
On sait d'autre part que la courbe représentative de f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse -1, par suite $f'(-1) = 0$, ce qui revient à dire que $e^{-k}(-ka + a + 10k) = 0$. Comme $e^{-k} \neq 0$, il en résulte que $-ka + a + 10k = 0$.

Finalement, on est amené à résoudre le système $\begin{cases} a + 10k = -5 \\ -ka + a + 10k = 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} a + 10k = -5 \\ -ka + a + 10k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ka + a + 10k = 0 \\ -ka - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -ka + a + 10k = 0 \\ k = \dfrac{-5}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 + a - \dfrac{50}{a} = 0 \\ k = \dfrac{-5}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a + a^2 - 50 = 0 \\ k = \dfrac{-5}{a} \end{cases}$$

L'équation $a^2 + 5a - 50$ possède deux solutions $a_1 = 5$ et $a_2 = -10$ ce qui donne deux valeurs possibles pour k : $k_1 = -1$ et $k_2 = \frac{1}{2}$. Il y donc deux fonctions possibles pour f :

$$f_1(x) = (5x+10)e^{-x} \text{ ou } f_2(x) = (-10x+10)e^{\frac{1}{2}x}$$

Exercice VII

103 **1.** D'après la représentation graphique, on peut conjecturer que la courbe représentative est au-dessus de la tangente.

2. $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

T : $y = \mathrm{e}(x-1) + \mathrm{e}$

$T : y = \mathrm{e}x.$

3. a. $f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}.$

b. et c.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

4. Sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}x \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}x$, donc la courbe représentative de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de la tangente T.

Exercice VIII

1. La fonction p est de type $\dfrac{1}{u(t)}$ dont la dérivée est $\dfrac{-u'(t)}{u^2(t)}$ on a donc :

$$p'(t) = \frac{-197273 \times 49,2 \times (-0,03117)e^{-0,03117t}}{(1+49,2e^{-0,03117t})^2} = \frac{302530,8e^{-0,03117t}}{(1+49,2e^{-0,03117})^2}$$

Pour tout $x \in [0;120]$, $e^{-0,03117t} > 0$ et $(1+49,2e^{-0,03117t})^2 > 0$ donc $p'(t) > 0$. Par conséquent la fonction p est strictement croissante sur l'intervalle $[0;120]$.

2. $t = 0$ pour l'année 1790 donc pour l'année 2016, on a $t = 226$.

$p(226) = 189155,3$ donc en utilisant ce modèle, la population américaine en 2016 devrait s'élever à 189155,3 milliers d'habitants.

On a donc une erreur de $\dfrac{324750 - 189155,3}{189155,3} \simeq 0,72$ soit environ 72%