Exercice I

① $P_{n+1} = (1+\alpha)P_n + \beta$, (P_n en milliers) et n entier naturel.

a) on a ici : $P_0 = 500$; $\alpha = 0,2$ et $\beta = 70$.

donc la suite (P_n) est une suite récurrente définie, pour tout entier naturel par : $\begin{cases} P_0 = 500 \\ P_{n+1} = 0,2P_n + 70 \end{cases}$ (#)

On cherche ici P_2 : (#) appliqué avec $n=0$, donne : $P_1 = 0,2P_0 + 70$

$P_1 = 0,2 \times 500 + 70 = 170$

(#) appliqué avec $n=1$ donne : $P_2 = 0,7P_1 + 70$

$P_2 = 0,7 \times 170 + 70$

$\boxed{P_2} = 119 + 70 = \boxed{189}$

Il y aura 189 000 bactéries au bout de deux jours.

b)
```
def Nombrebacteries(N):
    P=500
    for i in range(0,N):
        P=0,7*P+70
    return P
```

2) a) Ici, $P_0 = 500$ et pour tout entier naturel n, $\boxed{P_{n+1}} = \left(1 + \frac{9}{100}\right) \times P_n = \boxed{1,09P_n}$.

Donc on a : $P_{n+1} = \alpha P_n + \beta$ avec ici : $\alpha = 1,09$ et $\beta = 0$.

b) (P_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,09$ et de premier terme $P_0 = 500$ car $P_{n+1} = 1,09P_n$ pour tout entier n.

c) Vu que (P_n) est géométrique on a : Pour tout entier naturel n, $P_n = P_0 \times q^n = 500 \times 1,09^n$.

Or $P_9 = 500 \times 1,09^9$

$P_9 \approx 1085,9$, donc $P_9 > 2 \times 500$: Après 9 jours le nombre de bactéries aura doublé.

Exercice II

1) $u_1 = u_0 \times 0,90 + 0,25$

$u_1 = 1 \times 0,9 + 0,25$

$u_1 = 1,15$

La quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi heure e

1,15 mg.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \left(1 - \frac{10}{100}\right) \times u_n + 0,25$

$$\boxed{u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25}$$

Ok

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 2,5 - u_n$.

$v_{n+1} = 2,5 - u_{n+1}$

$v_{n+1} = 2,5 - (0,9u_n + 0,25)$

$v_{n+1} = -0,9u_n + 2,25$

Or, $u_n = 2,5 - v_n$

Donc, $v_{n+1} = -0,9(2,5 - v_n) + 2,25$

$v_{n+1} = -2,25 + 0,9v_n + 2,25$

$v_{n+1} = 0,9v_n$ Ok

Donc, la suite (v_n) est géométrique de raison $Q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = 2,5 - 1 \Leftrightarrow v_0 = 1,5$. Oui

b) (v_n) est ~~arithmétique~~ géométrique donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$v_n = v_0 \times Q^n$
$v_n = 1,5 \times 0,9^n$

Or, $u_n = 2,5 - v_n$
$u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$ Oui

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2,5$ car $u_{50} = 2,4927$
$u_{100} = 2,49996$

Or, $2,5 < 3$
Donc, d'après le modèle choisi, le traitement ne présente pas de risque pour le patient. Oui

4)a)
```
def efficace():
    u = 1
    n = 0
    while u <= 1,8 :
        u = 2,5 - 1,5 x 0,9**(n+1)
        n = n + 1
    return(n)
```

b) Le script renvoie la valeur 8. Le résultat signifie qu'au bout de 8 périodes d'une demi heure, donc au bout de 4 heures, le médicament commence à être réellement efficace. Oui

Exercice III

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} & \text{(!) (suite définie ici à partir du rang 1).} \\ \text{Pour tout entier } n \geq 1, \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n & (*) \end{cases}$$

(!)

① $\boxed{u_2} = \frac{1+1}{3\times 1} u_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{9}}$

$\boxed{u_3} = \frac{2+1}{3\times 2} u_2 = \frac{\cancel{3}}{6} \times \frac{1}{\cancel{3}} = \boxed{\frac{1}{6}}$

$\boxed{u_4} = \frac{3+1}{3\times 3} u_3 = \frac{4}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{2\times 2}{9\times 2\times 3} = \boxed{\frac{2}{27}}$

② Pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{n}$.

donc $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} \overset{(*)}{=} \frac{\frac{n+1}{3n} u_n}{n+1} = \frac{\cancel{n+1}}{3n} \times \frac{1}{\cancel{n+1}} \times u_n = \frac{u_n}{3n} = \frac{1}{3} \frac{u_n}{n}$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n}$$

La précédente relation, vraie pour tout entier $n \geq 1$, montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $\boxed{v_1} = \frac{u_1}{1} = u_1 = \boxed{\frac{1}{3}}$.

③ Pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ car (v_n) est géométrique et définie à partir du rang 1.

$$v_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Par suite, comme $v_n = \frac{u_n}{n}$, on a : $\boxed{u_n = n v_n = n\left(\frac{1}{3}\right)^n, \text{ pour tout entier } n \geq 1}$

④ Pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - n \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times \left(n+1 - \frac{n}{\frac{1}{3}}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times (n+1-3n) = \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}(1-2n)}$$

$\frac{1}{3} > 0$, donc $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} > 0$ et $n \geq 1$, donc $2n \geq 2$, donc $-2n \leq -2$, donc $1 - 2n \leq -1 < 0$

Par suite (règle des signes d'un produit), on a : $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}(1-2n) < 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

Donc pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est strictement décroissante (à partir du rang 1).

5)

Manifestement (conjecture sur calculatrice), il semblerait que (u_n) converge vers 0 c'est à dire que : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$

Exercice IV

1) $A = 2{,}\underbrace{8484\ldots84}_{n \text{ blocs de } 84\ (n\geq 1)}$

$A = 2 + \underbrace{0{,}84}_{\frac{84}{100}} + \underbrace{0{,}0084}_{\frac{84}{10000}} + \cdots + \frac{84}{100^n}$

$A = 2 + \frac{84}{100}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{100^{n-1}}\right)}_{\text{Somme des } n \text{ premiers termes d'une suite géométrique de raison } q=\frac{1}{100}}$

$\frac{1}{100} \neq 1$, donc on peut réduire cette somme :

$A = 2 + \frac{84}{100} \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{100}\right)^k = 2 + \frac{84}{100} \times \frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \frac{84}{100} \times \frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{\frac{99}{100}}$

$A = 2 + \frac{84}{100} \times \frac{100}{99} \times \left(1 - \left(\frac{1}{100}\right)^n\right)$

$\boxed{A = 2 + \frac{84}{99}\left(1 - \left(\frac{1}{100}\right)^n\right)}$ $(*)$

En écriture fractionnaire : $A = \frac{2\times 99 + 84 \times \left(\frac{100^n - 1}{100^n}\right)}{99} = \frac{198 \times 100^n + 84 \times 100^n - 84}{99 \times 100^n}$

$\boxed{A} = \frac{282 \times 100^n - 84}{99 \times 100^n} = \frac{3(94 \times 100^n - 28)}{3 \times 33 \times 100^n} = \boxed{\frac{94 \times 100^n - 28}{33 \times 100^n}}$

2) Grâce à $(*)$ et comme $0 < \frac{1}{100} < 1$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n = 0$

Par suite, $\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \left(\frac{1}{100}\right)^n\right) = 1$ et donc la fraction correspondant à l'écriture illimitée : $2{,}848484\ldots\ldots$ est : $2 + \frac{84}{99} = 2 + \frac{28}{33} = \frac{66}{33} + \frac{28}{33} = \boxed{\frac{94}{33}}$

Exercice V

1) $300\,000 \times 0,03 = 9\,000$

Au cours de la première année, le montant des intérêts dus est 9000€.

$C_1 = 300\,000 - 12 \times 1500 + 9000$

$C_1 = 291\,000$

2) $C_2 = \left(1 + \frac{3}{100}\right) \times C_1 - 12 \times 1500$

$C_2 = 1,03\,C_1 - 18\,000$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C_{n+1} = \left(1 + \frac{3}{100}\right) \times C_n - 12 \times 1500$

$C_{n+1} = 1,03\,C_n - 18\,000$ Oui

4) La suite (C_n) n'est pas géométrique car elle n'a pas la forme $C_{n+1} = C_n \times q$.

5) a) $u_0 = C_0 - 600\,000$

$u_0 = 300\,000 - 600\,000$

$u_0 = -300\,000$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = C_n - 600000$

$u_{n+1} = C_{n+1} - 600\,000$

$u_{n+1} = 1,03\,C_n - 18\,000 - 600\,000$

$u_{n+1} = 1,03\,C_n - 618\,000$

Or, $C_n = u_n + 600000$

Donc, $u_{n+1} = 1,03\,(u_n + 600\,000) - 618000$

$u_{n+1} = 1,03\,u_n + 618\,000 - 618\,000$

$u_{n+1} = 1,03\,u_n$

La suite (u_n) est ~~arithmétique~~ géométrique de raison $q = 1,03$ et de premier terme $u_0 = -300\,000$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 \times q^n$

$u_n = -300\,000 \times 1,03^n$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C_n = u_n + 600\,000$

$C_n = -300\,000 \times 1,03^n + 600\,000$

Oui

6) a) $C_{23} \approx 7324$
$C_{24} \approx -9838$

Le prêt durera approximativement un peu plus de 23 ans.

b) $18\,000 \times 24 = 432\,000$
La maison aura coûté un peu moins de 432 000 € soit 132 000 € de plus que son prix initial. Cela nous montre que les taux d'intérêts instaurés par les banques représentent une somme d'argent à ne pas négliger lors d'importants achats comme une maison.

Exercice VI

0) $\boxed{\mathcal{A}_1 = \frac{1}{9}}$ (pas trop violent !!!) $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + 8 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{9} + 8 \times \frac{1}{81} = \frac{1}{9} + \frac{8}{81}$

$\boxed{\mathcal{A}_2} = \frac{9}{81} + \frac{8}{81} = \boxed{\frac{17}{81}}$.

1) Pour tout entier $n \geq 1$: $\mathcal{A}_{n+1} = \underbrace{\mathcal{A}_n}_{\substack{\text{aire de ce qui était coloré} \\ = \text{l'étape } n}} + \frac{1}{9}\overbrace{(1 - \mathcal{A}_n)}^{\text{aire de la zone non encore colorée}}$ (= zone blanche restante).

$\underline{\mathcal{A}_{n+1}} = \mathcal{A}_n + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\mathcal{A}_n = \frac{9}{9}\mathcal{A}_n - \frac{1}{9}\mathcal{A}_n + \frac{1}{9} = \underline{\frac{8}{9}\mathcal{A}_n + \frac{1}{9}}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_n - 1$ (rappel : $\mathbb{N}^*$ désigne les entiers naturels non nuls).

Rappel : Une suite $(\mathcal{B}_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ est géométrique ssi il existe un réel q tel que pour tout entier n non nul on ait : $\mathcal{B}_{n+1} = q \times \mathcal{B}_n$.

Méthode : Pour établir que $(\mathcal{B}_n)$ est géométrique, je dois donc exprimer $\mathcal{B}_{n+1}$ en fonction de $\mathcal{B}_n$ et établir que $\mathcal{B}_{n+1}$ = une constante $\times\ \mathcal{B}_n$. (Une constante est un nombre réel indépendant de la valeur de n !).

Ici, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}_{n+1} = \mathcal{A}_{n+1} - 1$ (par définition de la suite $(\mathcal{B}_n)$!).

Or, d'après la question 1), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}_{n+1} = \frac{8}{9}\mathcal{A}_n + \frac{1}{9}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B_{n+1} = \frac{8}{9} A_n + \frac{1}{9} - 1 = \frac{8}{9} A_n + \frac{1}{9} - \frac{9}{9} = \frac{8}{9} A_n - \frac{8}{9}$

$$B_{n+1} = \frac{8}{9} \underbrace{(A_n - 1)}_{\text{"}B_n \text{ (définition de } B_n\text{!!)}}$$ (on a mis en facteur $\frac{8}{9}$, technique classique pour conclure systématiquement).

$$\boxed{B_{n+1} = \frac{8}{9} \times B_n}.$$

La précédente relation, vraie pour tout entier $n \neq 0$, prouve que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{8}{9}$.

Le premier terme de cette suite définie sur $\mathbb{N}^*$ (!) est ici $B_1 = A_1 - 1 = \frac{1}{9} - 1 = \frac{-8}{9}$

b) On sait à présent que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = \frac{8}{9}$ et de premier terme $B_1 = -\frac{8}{9}$.

D'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $B_n = B_1 \times q^{n-1}$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = -\frac{8}{9} \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = -\left(\frac{8}{9}\right)^1 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = -\left(\frac{8}{9}\right)^{1+n-1} = -\left(\frac{8}{9}\right)^n$.

⚠ Certains (la majorité !) écrivent $B_n = B_0 \times q^n$: or ici, (B_n) n'est définie qu'à partir du rang $n = 1$. Il est donc crucial, dans ce genre de question de bien regarder à partir de quel rang la suite est définie.

Par l'énoncé, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n - 1$, donc $\boxed{A_n} = B_n + 1 = \boxed{-\left(\frac{8}{9}\right)^n + 1}$

(trouvé 4 lignes plus haut)

c) # le cours : on étudie le signe de la quantité $A_{n+1} - A_n$ (sur $\mathbb{N}^*$) pour trouver le sens de variation de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

Vu que $\frac{8}{9} > 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{8}{9}\right)^n > 0$ car $\left(\frac{8}{9}\right)^n$ est le produit de n facteurs strictement positifs (4)
et $\frac{1}{9} > 0$.

Donc d'après la règle des signes d'un produit, $\left[\left(\frac{8}{9}\right)^n \times \frac{1}{9} > 0\right]$ (si vous ne voyez pas de quoi je parle, peut être que "plus fois plus" donne plus vous est plus parlant ?!?).

Ainsi :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}_{n+1} - \mathcal{A}_n > 0$: la suite $(\mathcal{A}_n)$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$

Cela confirme ce que l'on voit physiquement : étape après étape, l'aire colorée en noir augmente manifestement).

d) Il semblerait que $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit convergente et converge vers 1.
Une calculatrice permet de conjecturer cela :

n	$\mathcal{A}_n$ (à 10^{-3} près)
10	0,692
20	0,905
50	0,997
100	0,999992

on s'intéresse aux "grandes valeurs de n"

on regarde le "comportement" des valeurs prises par $(\mathcal{A}_n)$.

On écrira : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = 1$.

Dire : "la suite $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 ou écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = 1$" est exactement la même chose !

e) A très long terme, c'est à dire au bout d'un très grand nombre d'étapes de colorations, le tapis de Sierpinski sera quasiment tout noir !!

e) A très long terme, c'est à dire au bout d'un très grand nombre d'étapes de colorations, le tapis de Sierpinski sera quasiment tout noir !!

(!) Si algébriquement on résout : $\mathcal{A}_n = 1 \iff 1-\left(\frac{8}{9}\right)^n = 1 \iff \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$, cette équation n'a aucune solution ((car $\frac{8}{9} \neq 0$) et un produit de facteurs non nuls est non nul !)
Donc le carré initial ne sera jamais tout noir !

f) Diverses possibilités :

α) Algo. en langage naturel

Variable : N de type entier non nul.
Initialisation : N prend la valeur 1.
Traitement : Tant que $-\left(\frac{8}{9}\right)^N + 1 <$ * $0,8$
  Remplacer N par N+1
Fin Tantque
Sortie : Afficher N

Codage sur T.I

1 $\boxed{sto\to}$ $\boxed{N}$
While $-\left(\frac{8}{9}\right)^N+1<0,8$
  N+1 $\boxed{sto\to}$ N
End
Disp N

* Le programme tourne en boucle tant que la quantité $1-\left(\frac{8}{9}\right)^N$ reste strictement inférieure à 0,8. Dès que ce n'est plus le cas, c'est à dire dès que $-\left(\frac{8}{9}\right)^N+1 \geq 0,8$ le programme s'arrête et renvoie en sortie la dernière valeur de N qu'il a mémorisé.

Avec Python :

```python
def seuil():
    n=1
    while (1-(8/9)**n) < 0.8:
        n=n+1
    return n
```

⑤

Grâce à ce programme, on trouve : $N=14$.
14 étapes de coloriages par ce processus sont nécessaires pour qu'au moins 80% de l'aire du carré initial ait été coloriée.

β) Exactement pareil : On change juste le 0,8 par 0,99 dans "Tant que.....".
On trouve en sortie ici $N=40$.

<u>Remarque</u> : Il est peut être plus judicieux de pouvoir choisir son seuil $A \in]0;1[$ où A représente un réel choisi au hasard dans $]0;1[$.

Avec Python :

```python
def seuil(A):
    n=1
    while 1 - (8/9)**n<A:
        n=n+1
    return n
```

Dans la console, on tape seuil(0.99) et l'algorithme renvoie 40 en sortie.