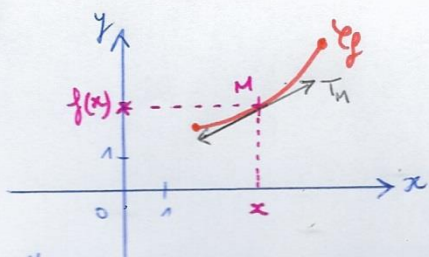


Exercice 15

a)



f est définie sur I
Soit T_M la tangente à γ en son point $M(x; f(x))$.

T_M a pour coefficient directeur $f'(x)$.

"La pente (= coefficient directeur) de T_M est égale au carré de l'ordonnée du point M " se traduit par :

$$\forall x \in I, f'(x) = (f(x))^2. \quad (\text{en tout point } M \text{ de } \gamma, \text{ d'où } \forall x \in I).$$

donc f est solution de l'équation différentielle : $y' = y^2$. (1)

b) Supposons y dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I ($\forall x \in I, y(x) \neq 0$, donc $y^2(x) \neq 0$).

$$\frac{y'}{y^2} = \left(-\frac{1}{y}\right)' \quad \text{par dérivée des fonctions composées.}$$

$$y' = y^2 \quad (1) \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{y}\right)' = 1 \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, -\frac{1}{y(x)} = x + C$$

Primitive de la fonction constante égale à 1.

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, y(x) = \frac{-1}{x+C}$$

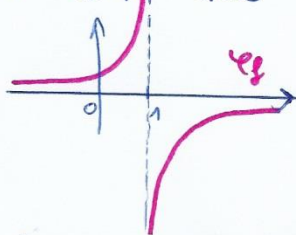
Nécessairement, $I \subset]-\infty; -C[\cup]-C; +\infty[$.

c) Les fonctions f définies sur $\mathbb{R} - \{-C\}$ par : $f(x) = \frac{-1}{x+C}$ vérifient (1) et ont donc, en chacun de leurs points, une tangente dont le coefficient directeur est égal au carré de l'ordonnée de ce point.

$$f(x) = \frac{-1}{x+C} \text{ et } f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{C} = 1 \Leftrightarrow C = -1.$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{-1}{x-1} = \frac{-1}{1-x} \text{ avec } x \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

Autre :



d) Par la même méthode, on cherche une fonction f définie sur un intervalle I , telle que :

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{1}{f(x)} \quad (f \text{ ne s'annulant pas sur } I).$$

$$\forall x \in I, f'(x)f(x) = 1, \text{ donc } \frac{1}{2}(f^2)'(x) = 1, \text{ donc } \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f^2(x) = 2x + C$$

Une fois que $\forall x \in I, f^2(x) > 0$ (f ne s'annule pas sur I et $f^2(x) > 0$) on a :

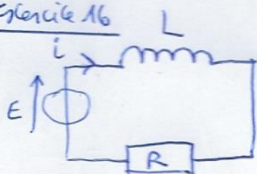
$$\forall x \in I, 2x + c > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{c}{2}.$$

f est donc définie sur un intervalle I contenu dans $]-\frac{c}{2}, +\infty[$.

et $\forall x \in I, f^2(x) = 2x + c$, donc $f(x) = -\sqrt{2x+c}$ ou $f(x) = \sqrt{2x+c}$.

Soit $c \in \mathbb{R}$, les fonctions de la forme : $x \mapsto -\sqrt{2x+c}$ et $x \mapsto \sqrt{2x+c}$ sont les seules solutions de ce problème. (avec $x \in I$).

Exercice 16



$Li' + Ri = E$ (En Physique, pas de y' ni de y , mais ici i' et i qui sont des fonctions de la variable t (temps)
où i = intensité instantanée du courant à l'instant $t \geq 0$, et $i(0) = 0$ est ici la condition initiale.

$$Li' + Ri = E \text{ équivaut à : } Li' = -Ri + E$$

$$\boxed{i'} = \frac{-Ri + E}{L} = \boxed{-\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}} \quad \text{car } L > 0.$$

Ainsi, i est solution d'une équation différentielle de la forme : $y' = ay + b$ avec :

Les solutions de $i' = -\frac{R}{L}i$ sont les fonctions de la forme : $t \mapsto k e^{-\frac{R}{L}t}$ où $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} a = -\frac{R}{L} \\ b = \frac{E}{L} \end{cases}$$

de plus, une solution particulière constante de $i' = -\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}$ est donnée par : $0 = -\frac{R}{L} \times c + \frac{E}{L}$ ou $c \in \mathbb{R}$

$$\text{donc } \frac{R}{L} \times c = \frac{E}{L}, \text{ donc } R \times c = E \text{ et } c = \frac{E}{R} \quad (R \neq 0).$$

donc d'après le cours, les solutions de $Li' + Ri = E$ sont les fonctions définies par :

$$\forall t \in [0; +\infty[, \quad i(t) = k e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}.$$

$$\text{de plus, } i(0) = 0 \Leftrightarrow k e^{-\frac{R}{L} \times 0} + \frac{E}{R} = 0 \Leftrightarrow k + \frac{E}{R} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{E}{R}.$$

$$\text{donc } \boxed{i(t)} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} = \boxed{\frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}.$$

Exercice 17

$f(t)$ = effectif, exprimé en milliers d'individus, t années après 2020 (c'est-à-dire en l'an $2020+t$).

Condition initiale: $f(0)=1$ (1000 personnes en l'an 2020).

f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et positive sur $[0; +\infty[$ (i.e. $\forall t \in [0; +\infty[, f(t) > 0$)

et f est solution sur $[0; +\infty[$ de (E): $y' = -\frac{1}{20} y (3 - \ln(y))$.

② Supposons que:

① $\forall t \in [0; +\infty[, f'(t) = -\frac{1}{20} (3 - \ln(f(t)))$

⚠ Pas de type $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$!

Vu que $\forall t \in [0; +\infty[, f(t) > 0$, posons $g(t) = \ln(f(t))$.

Ainsi, $\forall t \in [0; +\infty[, f'(t) = -\frac{1}{20} (3 - g(t))$. avec: $g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$, donc on peut

dire que: $\forall t \in [0; +\infty[, f'(t) = \underline{g'(t) f(t)}$ et $g(t) = \ln(f(t))$

donc $e^{g(t)} = e^{\ln(f(t))}$, donc $\underline{f(t) = e^{g(t)}}$.

Par suite, $\forall t \in [0; +\infty[, \underline{g'(t) e^{g(t)}} = -\frac{1}{20} (3 - g(t))$

$$g'(t) = e^{-g(t)} \times \left(-\frac{f(t)}{20}\right) \times (3 - g(t)) \quad \text{et} \quad e^{-g(t)} = \frac{1}{f(t)}$$

$$g'(t) = \frac{1}{f(t)} \times \left(-\frac{f(t)}{20}\right) \times (3 - g(t))$$

$$g'(t) = -\frac{1}{20} (3 - g(t))$$

$$\boxed{g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}}$$

donc g est solution de $y' = \frac{1}{20} y - \frac{3}{20}$.

Réciproque: Méthode précédente: Si $\forall t \in [0; +\infty[, g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}$ avec $g(t) = \ln(f(t))$

$$\text{on a: } \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{20} \ln(f(t)) - \frac{3}{20}$$

$$\begin{cases} g(t) = \ln(f(t)) \\ g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \end{cases}$$

$$\text{donc } f'(t) = \frac{1}{20} f(t) \ln(f(t)) - \frac{3}{20} f(t)$$

$$f'(t) = \frac{1}{20} f(t) (\ln(f(t)) - 3) = -\frac{1}{20} f(t) (3 - \ln(f(t)))$$

donc f est solution de (E): $y' = -\frac{1}{20} y (3 - \ln(y))$.

Conclusion: On a l'équivalence: f est solution de (E) sur $[0; +\infty[$ si et seulement si $g = \ln(f)$ est solution

$$\text{de (H): } Z' = \frac{1}{20}Z - \frac{3}{20} \text{ sur } [0; +\infty[.$$

② (H): $Z' = \frac{1}{20}Z - \frac{3}{20}$ est de la forme: $Z' = aZ + b$ avec: $a = \frac{1}{20}$ et $b = -\frac{3}{20}$.

D'après le cours, les fonctions Z solutions de (H) ont définies par: $\forall t \in [0; +\infty[, Z(t) = ke^{\frac{1}{20}t} + 3$
($k \mapsto -3$ (fonction constante égale à -3) est l'unique solution de (H))! où $k \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{F}_H = \left\{ \begin{array}{l} [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto ke^{\frac{1}{20}t} + 3, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

③ $g = \ln(f)$ est solution sur $[0; +\infty[$ de (H).

avec $\exists k \in \mathbb{R}, \forall t \in [0; +\infty[, g(t) = \ln(f(t)) = ke^{\frac{1}{20}t} + 3$

avec $\forall t \in [0; +\infty[, f(t) = e^{g(t)} = e^{ke^{\frac{1}{20}t} + 3}$

de plus, $f(0) = 1 \Leftrightarrow e^{ke^0 + 3} = 1 \Leftrightarrow e^{k+3} = 1 \Leftrightarrow e^{k+3} = e^0$

$$\Leftrightarrow k+3 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -3.$$

donc, $\forall t \in [0; +\infty[, f(t) = e^{-3e^{\frac{t}{20}} + 3}$

④ 20 individus $\Leftrightarrow \frac{20}{1000} = 0,02$

$$f(t) < 0,02 \Leftrightarrow e^{-3e^{\frac{t}{20}} + 3} < 0,02$$

$$f(t) < 0,02 \Leftrightarrow \ln(e^{-3e^{\frac{t}{20}} + 3}) < \ln(0,02)$$

$$f(t) < 0,02 \Leftrightarrow -3e^{\frac{t}{20}} + 3 < \ln(0,02)$$

$$f(t) < 0,02 \Leftrightarrow 3 - \ln(0,02) < 3e^{\frac{t}{20}}$$

$$f(t) < 0,02 \Leftrightarrow \frac{3 - \ln(0,02)}{3} < e^{\frac{t}{20}}$$

avec $\ln(0,02) < 0$
donc $\frac{3 - \ln(0,02)}{3} > 0$.

$$f(t) < 0,02 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3 - \ln(0,02)}{3}\right) < \ln(e^{\frac{t}{20}})$$

croissance de $t \mapsto \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f(t) < 0,02 \Leftrightarrow \frac{t}{20} > \ln\left(\frac{3 - \ln(0,02)}{3}\right) \Leftrightarrow t > 20 \ln\left(\frac{3 - \ln(0,02)}{3}\right)$$

Avec la calculatrice: $20 \ln\left(\frac{3 - \ln(0,02)}{3}\right) \approx 16,69$.

Il faudra donc environ 17 ans pour que la taille de cet échantillon devienne inférieure à 2 individus.

Exemple 1

1a) $q(t) = C u(t)$ (*) et $\underbrace{u(t) + R i(t)} = E$

$i(t) = q'(t)$ donc on a : $\frac{q(t)}{C} + R q'(t) = E$ Car (*) fait que $u(t) = \frac{q(t)}{C}$
Vus que $C \neq 0$.

En réordonnant, on a : $R q'(t) + \frac{1}{C} q(t) = E$

Bref, q est solution de l'équation différentielle : $R q' + \frac{1}{C} q = E$ sur $[0, +\infty[$.

1b) $R q' + \frac{1}{C} q = E$

donc $R q' = -\frac{1}{C} q + E$, donc $q' = \frac{1}{R} \left(-\frac{1}{C} q + E \right) = -\frac{1}{RC} q + \frac{E}{R}$

$q' = -\frac{1}{RC} q + \frac{E}{R}$ qui est de la forme : $y' = ay + b$ avec : $\begin{cases} a = -\frac{1}{RC} \\ b = \frac{E}{R} \end{cases}$

D'après le cours, les solutions sont les fonctions q définies sur $[0, +\infty[$ par :

$q(t) = k e^{-\frac{1}{RC} t} + C \cdot E$ (la fonction constante solution de $q' = -\frac{1}{RC} q + \frac{E}{R}$ vérifie : $0 = -\frac{1}{RC} \lambda + \frac{E}{R}$
donc $\frac{\lambda}{RC} = \frac{E}{R}$ et $\lambda = C \cdot E$)

1c) $q(0) = 0$ équivalent : $k e^0 + C E = 0 \Leftrightarrow k = -C E$.

donc $\forall t \in [0, +\infty[$, $q(t) = -C E e^{-\frac{1}{RC} t} + C E = C E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$.

2a) $\boxed{Q} = \lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} C E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = \boxed{C E}$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t}{RC} = -\infty$ vu que $R, C > 0$
et $\lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0$, donc par composition
Somme et produit, $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = C E$.

b) On pose $\tau = RC$

Ainsi, $q(t) = C E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \tau \cdot \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ car $C = \frac{\tau}{R}$.

donc $q(\tau) = C E \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}} \right) = C E \left(1 - e^{-1} \right) = Q \left(1 - e^{-1} \right)$.

donc $\frac{q(\tau)}{Q} \times 100 = (1 - e^{-1}) \times 100$ soit environ 63 : Au bout d'une durée égale à τ , le

condensateur est chargé à environ 63% de sa charge maximale.

de même, $q(5\tau) = CE(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}) = CE(1 - e^{-5})$.

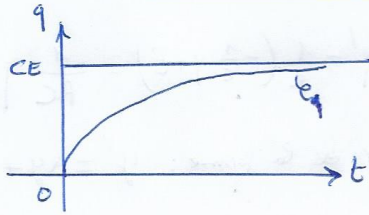
Or $1 - e^{-5} \approx 0,993$, donc au bout d'une durée de 5τ , le condensateur est chargé à environ 99,3% de sa charge maximale.

③ $q(t) = CE(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec $\tau > 0$.

a) $q'(t) = CE(0 - (-\frac{1}{\tau})e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\frac{CE}{\tau} > 0$ car $CE, \tau > 0$
et $\forall t \in [0; +\infty[$, $e^{-\frac{t}{\tau}} > 0$

donc, $\forall t \in [0; +\infty[$, $q'(t) > 0$: q est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Le graphique se fait très bien :



b) Soit $T(\tau; Q)$ et $O(0;0)$

(OT) a pour coefficient directeur : $m = \frac{y_T - y_0}{x_T - x_0} = \frac{Q}{\tau}$ avec $\begin{cases} Q = CE \\ \tau = RC \end{cases}$

$\boxed{m = \frac{CE}{RC} = \frac{E}{R}}$

et $q'(t) = \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$, donc $q'(0) = \frac{CE}{\tau} e^0 = \frac{CE}{\tau} = \frac{CE}{RC} = \frac{E}{R}$.

Ainsi, $m = q'(0)$: la droite (OT) est donc la tangente à q en 0

Exercice I (Type Bac)

$$(E): y' + 3y = e^{-3x}$$

a) u est définie sur $\mathbb{R}$ par: $u(x) = xe^{-3x}$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 1 \cdot e^{-3x} + x \cdot (-3e^{-3x}) = e^{-3x} - 3xe^{-3x}$$

on doit montrer que u est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, c'est à dire prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) + 3u(x) = e^{-3x}$.

$$\text{Or, } \forall x \in \mathbb{R}, u'(x) + 3u(x) = e^{-3x} - 3xe^{-3x} + 3xe^{-3x} = e^{-3x}$$

donc u est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

b) $(E_0): y' + 3y = 0$ c'est à dire: $y' = -3y$

$$\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Re^{-3x}, R \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

c) Supposons que v est solution de (E) sur $\mathbb{R}$: on a: $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) + 3v(x) = e^{-3x}$

de plus, u est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ (q.a), donc: $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) + 3u(x) = e^{-3x}$.

$$\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}, v'(x) + 3v(x) - (u'(x) + 3u(x)) = e^{-3x} - e^{-3x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) + 3v(x) - u'(x) - 3u(x) = 0.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) - u'(x) + 3(v(x) - u(x)) = 0.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (v-u)'(x) + 3(v-u)(x) = 0$$

donc $v-u$ est solution de $(E_0): y' + 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement: Supposons $v-u$ solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$: (montrons que v est solution de (E) sur $\mathbb{R}$):

d'après la question b), il existe $R \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (v-u)(x) = Re^{-3x}$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}, v(x) - u(x) = Re^{-3x}$ et $v(x) = Re^{-3x} + u(x)$ avec $u(x) = xe^{-3x}$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = Re^{-3x} + xe^{-3x}$ et $v(x) = (R+x)e^{-3x}$

$$\begin{cases} v'(x) = 1e^{-3x} + (R+x)(-3)e^{-3x} \\ v'(x) = e^{-3x} - 3Re^{-3x} - 3xe^{-3x} \end{cases}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) + 3v(x) = e^{-3x} - 3Re^{-3x} - 3xe^{-3x} + 3(R+x)e^{-3x}$

$$v'(x) + 3v(x) = e^{-3x} - 3Re^{-3x} - 3xe^{-3x} + 3Re^{-3x} + 3xe^{-3x} = e^{-3x}$$

donc v est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Conclusion: v est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ équivaut à $v-u$ est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.

d) d'après 1b) et 1c) on a:

$$\exists R \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (v-u)(x) = R e^{-3x}$$

$$\text{donc, } \forall x \in \mathbb{R}, v(x) - u(x) = R e^{-3x}$$

$$v(x) = R e^{-3x} + u(x) \quad \text{avec } u(x) = x e^{-3x} \quad (\text{q. a.})$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}, v(x) = R e^{-3x} + x e^{-3x} = (x+R) e^{-3x}.$$

$$f(\epsilon) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+R) e^{-3x}, R \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Exemple 2

$$v'(t) + \frac{g}{36} v^2(t) = g \quad \text{ou} \quad g \approx 9,81 \text{ N.m}^{-2} \quad \text{et} \quad v(0) = 66 \quad (\text{condition initiale}).$$

① $\forall t \in [0; +\infty[$, $f(t) = \frac{1}{v(t)-6}$

a) avec $\forall t \in [0; +\infty[$, $v(t)-6 = \frac{1}{f(t)}$, or $\boxed{v(t) = \frac{1}{f(t)} + 6}$ $v(t) = \frac{1+6f(t)}{f(t)}$.

b) $v^2(t) = \left(\frac{1+6f(t)}{f(t)} \right)^2 = \frac{1+12f(t)+36f^2(t)}{f^2(t)} = \frac{1}{f^2(t)} + \frac{12f(t)}{f^2(t)} + \frac{36f^2(t)}{f^2(t)}$

$$\boxed{v^2(t) = \frac{1}{f^2(t)} + \frac{12}{f(t)} + 36}$$

c) Partons de $v(t) = \frac{1}{f(t)} + 6$ (2 fonctions dérivables égales ont même dérivée donc :)

$$v'(t) = \frac{-f'(t)}{f^2(t)} + 0, \text{ donc } \boxed{v'(t) = -\frac{f'(t)}{f^2(t)}}$$

d) On sait que $v'(t) + \frac{g}{36} v^2(t) = g$.

or, $\forall t \in [0; +\infty[$, $v'(t) = -\frac{g}{36} v^2(t) + g$ or d'après b) on a :

$$v'(t) = -\frac{g}{36} \left(\frac{1}{f^2(t)} + \frac{12}{f(t)} + 36 \right) + g$$

$$v'(t) = -\frac{g}{36} \times \frac{1}{f^2(t)} - \frac{1}{3} g \times \frac{1}{f(t)} - g + g$$

$$\boxed{v'(t) = -\frac{g}{36} \times \frac{1}{f^2(t)} - \frac{g}{3} \times \frac{1}{f(t)}}$$

Or, d'après c), on a : $\boxed{v'(t) = -\frac{f'(t)}{f^2(t)}}$, de sorte que : $-\frac{f'(t)}{f^2(t)} = -\frac{g}{36} \times \frac{1}{f^2(t)} - \frac{g}{3} \times \frac{1}{f(t)}$.

donc : $f'(t) = f^2(t) \left(\frac{g}{36} \times \frac{1}{f^2(t)} + \frac{g}{3} \times \frac{1}{f(t)} \right)$ (on a multiplié par -1 puis par $f^2(t)$ la précédente égalité).

$$f'(t) = \frac{g}{36} + \frac{g}{3} f(t)$$

$\underline{f'(t) = \frac{g}{3} f(t) + \frac{g}{36}}$: donc f est solution de (E) : $y' = \frac{g}{3} y + \frac{g}{36}$ sur $[0; +\infty[$.

2a) (E): $y' = \frac{2}{3}y + \frac{g}{36}$ avec $\frac{g}{3}$ constante et $\frac{g}{36}$ aussi.

Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par: $f(t) = k e^{\frac{2}{3}t} - 12$ où $k \in \mathbb{R}$.
(Pourquoi la fonction constante égale à -12 convient? Car: $0 = \frac{2}{3} \times (-12) + \frac{g}{36}$ conduit à: $g = 24$.)

2b) $f(0) = \frac{1}{v(0) - 6}$. D'après la définition de f à la question 1) et $v(0) = 66$ (condition initiale).

donc $f(0) = \frac{1}{66-6} = \frac{1}{60}$.

$f(0) = \frac{1}{60} \Leftrightarrow k e^{\frac{2}{3} \times 0} - 12 = \frac{1}{60} \Leftrightarrow k - 12 = \frac{1}{60} \Leftrightarrow k = 12 + \frac{1}{60} = \frac{721}{60}$

Ainsi, $\forall t \in [0; +\infty[, f(t) = \frac{721}{60} e^{\frac{2}{3}t} - 12$ (soit $f(t) \approx \frac{721}{60} e^{\frac{2}{3}t} - 12$)
Car $g \approx 9,81$

c) Grâce à 1a), $v(t) = \frac{1}{f(t)} + 6 = \frac{1}{\frac{721}{60} e^{\frac{2}{3}t} - 12} + 6$

$$v(t) = \frac{60}{721 e^{\frac{2}{3}t} - 720} + 6$$

③ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}t = +\infty$ car $g > 0$ et $\lim_{T \rightarrow +\infty} e^T = +\infty$, donc par limite de composition on a:

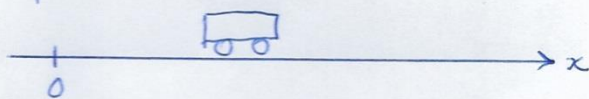
$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{2}{3}t} = +\infty$, et par limite de produit, somme et quotient: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60}{721 e^{\frac{2}{3}t} - 720} = 0$.

Donc par limite de somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 6$

Ici, c'est un problème de physique, donc dire que la droite d'équation: $y = 6$ est ASH à $t \rightarrow +\infty$ n'apporte rien!

Concrètement, après un long moment succédant à l'ouverture du parachute, la vitesse de
ce dernier va se stabiliser à 6 m.s^{-1}

Exemple 3



$x(t)$ = distance qui sépare le chariot de l'origine à l'instant t (en s).

① $x(0) = 0$ car le chariot part de l'origine

② $v(t) = x'(t)$ avec x solution sur $[0; +\infty[$ de : $200x'' + 25x' = 50$.

a) Si x est solution sur $[0; +\infty[$ de $200x'' + 25x' = 50$, alors comme $v = x'$ (et donc $x'' = v'$)

on a : $200v' + 25v = 50$ or par suite : $200v' = -25v + 50$

$$v' = \frac{-25v + 50}{200} = -\frac{25}{200}v + \frac{50}{200}$$

$$v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$$

$$v' = -0,125v + 0,25$$

Ainsi, v est solution de : $v' = -0,125v + 0,25$ sur $[0; +\infty[$.

Réciproquement : Si v est solution de $v' = -0,125v + 0,25$ sur $[0; +\infty[$, alors comme $\begin{cases} v = x' \\ v' = x'' \end{cases}$

on a : $x'' = -0,125x' + 0,25$

$$\text{Donc : } 200x'' = 200(-0,125x' + 0,25) = -25x' + 50$$

$$\text{Donc } 200x'' + 25x' = 50 : x \text{ vérifie bien l'E.D. : } 200x'' + 25x' = 50$$

b) $y' = -0,125y + 0,25$ est de la forme : $y' = ay + b$, avec : $a = -0,125$ et $b = 0,25$

d'après le cours... les solutions de cette E.D. notée (E) sont les fonctions f définies sur $[0; +\infty[$

$$\text{par : } f(t) = ke^{-0,125t} + 2 \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

c) $v(t) = ke^{-0,125t} + 2$ car v est solution de (E) sur $[0; +\infty[$.

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow ke^0 + 2 = 0 \Leftrightarrow k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -2.$$

$$\text{Donc, } \forall t \in [0; +\infty[, \quad v(t) = -2e^{-0,125t} + 2.$$

$$d) v(t) = -2e^{-0,125t} + 2.$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,125t = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc par limite de composition: $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,125t} = 0$

En suite, par limite de produit et de somme: $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 2$

Au bout d'un long moment, la vitesse du chariot va être stable et sera de 2 m.s^{-1} .

$$3a) v(t) = x'(t) \text{ et } v(t) = -2e^{-0,125t} + 2$$

$$\text{alors } x'(t) = -2e^{-0,125t} + 2$$

$$\text{alors (on primitive)} \quad x(t) = -2 \frac{e^{-0,125t}}{-0,125} + 2t + \lambda, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = 16e^{-0,125t} + 2t + \lambda$$

De plus, $x(0) = 0$ (q.1), donc on a: $16e^0 + 2 \times 0 + \lambda = 0$, donc $16 + \lambda = 0$ et $\lambda = -16$.

$$\text{alors } \forall t \in [0; +\infty[, \quad x(t) = 2t - 16 + 16e^{-0,125t}$$

$$3b) \text{ On cherche ici } x(30): \quad x(30) = 2 \times 30 - 16 + 16e^{-0,125 \times 30}$$

$$x(30) = 44 + 16e^{-3,75}$$

$$x(30) \approx 44,3 \text{ m}$$