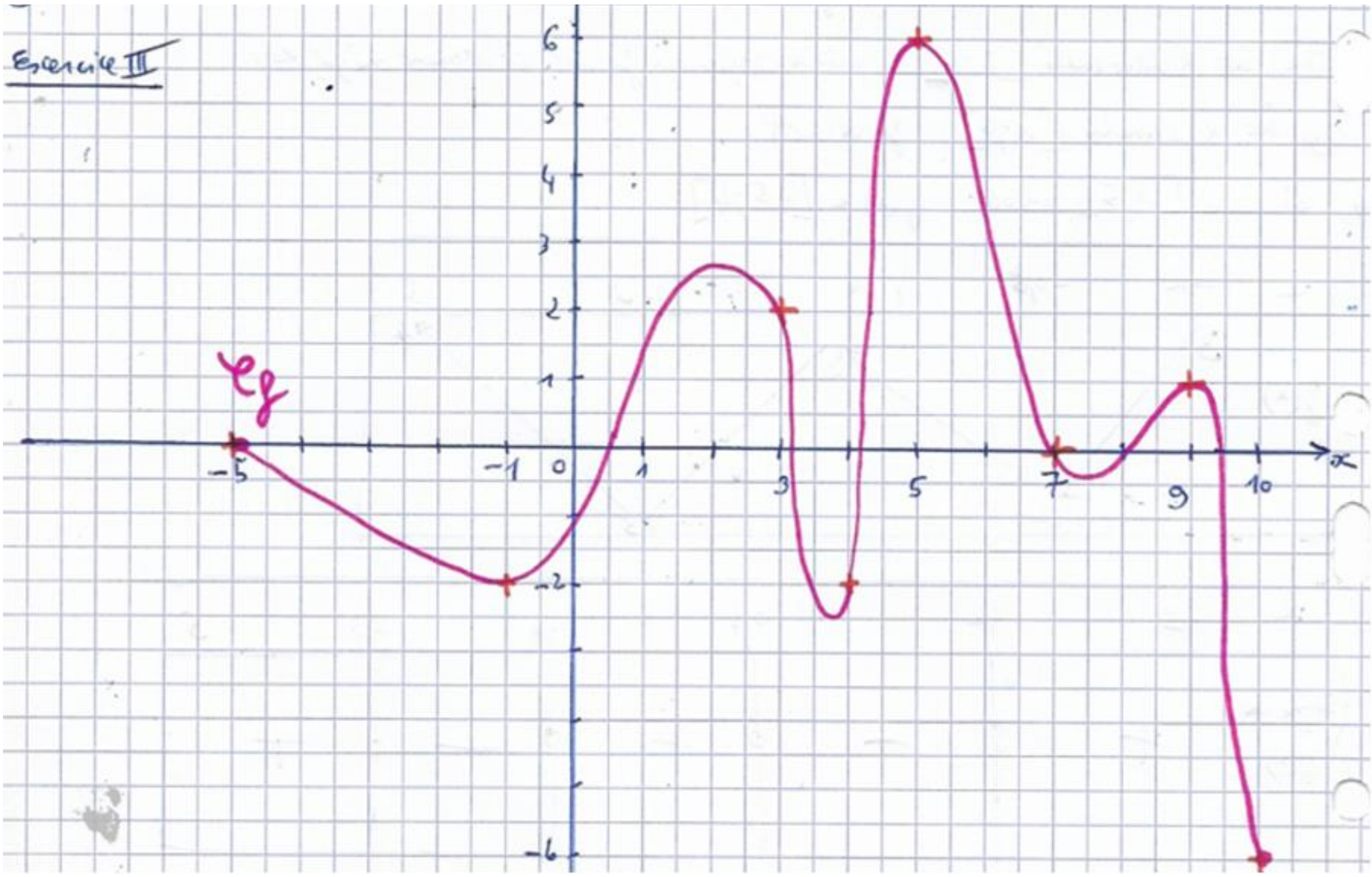
Seconde **Corrigé du DM13** **Avril 2024**

Exercice I



Le tableau de variation est immédiat.

Exercice II

x	-3		-1		2		5		7
Variation de h	-2	↗	-1	↘	-4	↗	4	↘	0

① $h(0) < h(1)$ est une affirmation FAUSSE !

En effet, h décroît sur $[-1;2]$, donc h décroît aussi sur $[0;1]$.

Or $0 < 1$ et h décroît sur $[0;1]$, donc $h(0) > h(1)$.

② $h(4) > h(6)$: le tableau donné ne permet pas de conclure !

$h(4) \in [-4;4]$ et $h(6) \in [0;4]$: impossible de comparer $h(4)$ et $h(6)$.

③ $h(-2) < h(2)$: Faux car $h(2) = -4$ et $h(-2) \in [-2;-1]$ car $-3 < -2 < 1$ donc $h(-3) < h(-2) < h(1)$ car h croît sur $[-3;1]$.

Donc $h(-2) \geqslant -2$ et par suite, $h(-2) \neq -4$.

④ $h(0,5)=h(1,5)$: Pas assez de renseignements ds le tableau pour pouvoir l'affirmer !!

⑤ Faux : le maximum de h sur $[-3;7]$ est égal à 4 (et ce dernier est atteint lorsque $x=5$)

⑥ Vrai !

Exercice III

a) 

P croît sur $[1;4]$:

x	1	4
$P(x)$	2π ↗	8π

Rappel : $P(x)=2\pi x$

b) a décroît sur $[1;4]$:

x	1	4
$a(x)$	24π ↘	9π

$a(1)=\pi\times5^2-\pi\times1^2=\pi(25-1)=24\pi$

$a(4)=\pi\times5^2-\pi\times4^2=25\pi-16\pi=9\pi$

Exercice IV

1) facile .... : le maximum de f sur $\mathbb{R}$ semble être égal à $\frac{1}{2}$.

2) Pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Donc $f(x)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2x}{2(x^2+1)}-\dfrac{(x^2+1)}{2(x^2+1)}=\dfrac{2x-(x^2+1)}{2(x^2+1)}=\dfrac{-x^2+2x-1}{2(x^2+1)}$

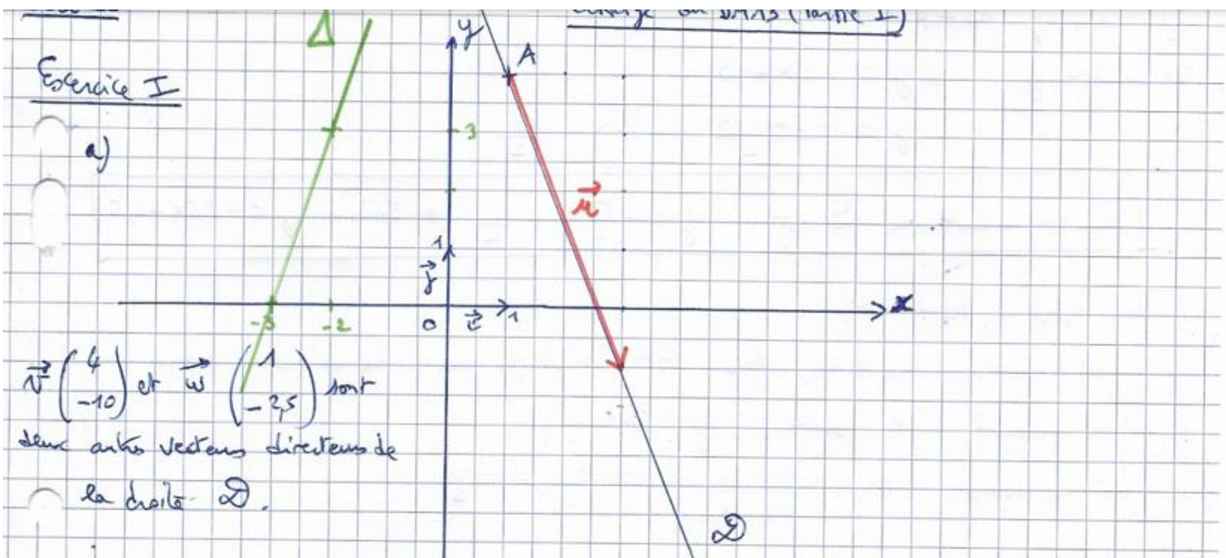
$f(x)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-(x^2-2x+1)}{2(x^2+1)}\underset{IR2}{=}\dfrac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)}$.

Or pour tout réel x, $(x-1)^2\geqslant0$; $2(x^2+1)>0$ donc $\dfrac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)}\leqslant0$.

Par suite, pour tout réel x, $f(x)-\dfrac{1}{2}\leqslant0$.

Comme $f(1)=\dfrac{1}{2}$, on a : $f(x)-f(1)\leqslant0$, donc $f(x)\leqslant f(1)$: f admet donc pour maximum sur $\mathbb{R}$ la valeur $\frac{1}{2}$ et ce maximum est atteint lorsque $x=1$.

Exercice V



Or, $A(1;4)$ appartient à $\mathscr{D}$, donc en faisant $x=1$ et $y=4$ dans (*), l'égalité est vérifiée (vraie) : $-5\times 1-2\times 4+c=0$

$$-5-8+c=0$$

$$c=13.$$

$\boxed{\text{Une E.C de } \mathscr{D} \text{ est : } -5x-2y+13=0}$.

$\boxed{\text{Une autre E.C de } \mathscr{D} \text{ est : } 5x+2y-13=0}$ (on a multiplié par -1 chacun des 2 membres de la précédente égalité).

c) $B(61;-146)$.

Testons si pour $x=61$ et $y=-146$, l'égalité : $5x+2y-13=0$ est vraie ou fausse :

Or, si $x=61$ et $y=-146$, alors $5x+2y-13=5\times 61+2\times(-146)-13=305-292-13=0$

Ainsi, $\boxed{B(61;-146) \text{ appartient à } \mathscr{D}}$ puisque ses coordonnées vérifie une E.C de cette droite.

Par un procédé identique : Pour $E(-100;256{,}49)$: ici $x=-100$ et $y=256{,}49$

et $5x+2y-13=5\times(-100)+2\times 256{,}49-13=-500+512{,}98-13=-0{,}02$.

Or $-0{,}02\neq 0$ donc l'égalité $5x+2y-13=0$ n'est pas vérifiée par les coordonnées du point E : $\boxed{E(-100;256{,}49)\notin\mathscr{D}}$.

d) $5x+2y-13=0$

On va isoler y : $2y=-5x+13$

$$y=\frac{-5x+13}{2}=-\frac{5}{2}x+\frac{13}{2}$$

$\boxed{\text{L'équation réduite de } \mathscr{D} \text{ est : } y=-\frac{5}{2}x+\frac{13}{2} \text{ ou encore } y=-2{,}5x+6{,}5}$

e) $G(-1;6)$ et $H(2;-4)$.

Vu que $-1\neq 2$, $x_G\neq x_H$, donc (GH) n'est pas verticale et admet donc une équation réduite de la forme : $y=mx+p$.

D'après le cours : $m=\frac{y_H-y_G}{x_H-x_G}=\frac{-4-6}{2-(-1)}=\frac{-10}{3}$.

Ainsi, $y=-\frac{10}{3}x+p$

De plus, $G(-1;6)\in(GH)$, donc : $\underbrace{y_G}_{=6}=-\frac{10}{3}x_G+p$

$$6=-\frac{10}{3}\times(-1)+p$$

$$6=\frac{10}{3}+p$$

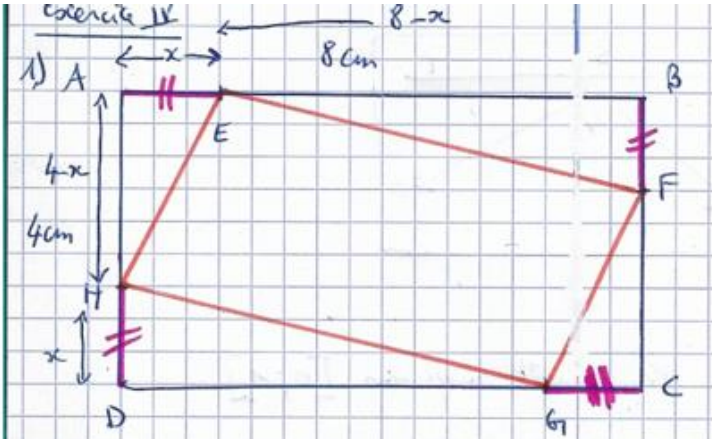
$$p=6-\frac{10}{3}=\frac{18}{3}-\frac{10}{3}=\frac{8}{3}$$

$\boxed{\text{L'équation réduite de } (GH) \text{ est : } y=-\frac{10}{3}x+\frac{8}{3}}$.

Exercice VI

exercice IV

1)



$AE = BF = CG = DH = x$.

2a) On doit avoir : $0 \leqslant x \leqslant 4$ et $0 \leqslant x \leqslant 8$

donc $0 \leqslant x \leqslant 4$: $\underline{x \in [0;4]}$.

On pose $\underline{I = [0;4]}$.

2b) $f(x) = \text{aire}(EFGH) = \text{aire}(ABCD) - (\text{aire}(AEH) + \text{aire}(EBF) + \text{aire}(FCG) + \text{aire}(DHG))$.

les triangles AEH et FCG sont identiques et $\text{aire}(AEH) = \text{aire}(FCG) = \dfrac{x(4-x)}{2}$

les triangles EBF et DHG sont identiques et $\text{aire}(EBF) = \text{aire}(DHG) = \dfrac{x(8-x)}{2}$

$f(x) = 8 \times 4 - \left(2 \times \dfrac{x(4-x)}{2} + 2 \times \dfrac{x(8-x)}{2}\right) = 32 - (x(4-x) + x(8-x))$

$\boxed{f(x)} = 32 - (4x - x^2 + 8x - x^2) = 32 - (-2x^2 + 12x) = \boxed{2x^2 - 12x + 32}$ (cm^2).

c) Sur $[0;4]$, grâce à une calculatrice :

Conjecture : le minimum de f sur $[0;4]$ semble être égal à 14 et atteint lorsque $x = 3$.

d) Pour tout réel x appartenant à $[0;4]$:

$f(x) - f(3) = 2x^2 - 12x + 32 - 14 = 2x^2 - 12x + 18 = 2(\underline{x^2 - 6x + 9}) = 2\underline{(x-3)}^2$

IR n°2.

Or, $(x-3)^2 \geqslant 0$ et $2 > 0$, donc, $2(x-3)^2 \geqslant 0$.

Par suite, pour tout réel x appartenant à $[0;4]$, $f(x) - f(3) \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant f(3)$:

f admet donc un minimum sur $[0;4]$ atteint lorsque $x = 3$ et égal à $f(3) = 14$.

Lorsque $x = 3$ cm, l'aire de EFGH est minimale, et égale à $14 \, cm^2$.