

Exercice I

0) Evénement élémentaire : Piñder le jìton numèro 3.

Evénement non élémentaire : Piñder un jìton portat un mècho pair

1) $A = \{10; 20; 30; 40; 50\}$. On est ici en situation d'équiprobabilité, donc :

$$P(A) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} = \underline{0,1}$$

$$B = \{41; 42; 43; 44; 45; 46; 47; 48; 49; 50\}.$$

$$P(B) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = \underline{0,2}$$

2) \bar{B} est l'événement : Piñder un jìton qui porte un mècho strictement inférieur à 41
ou encore qui est inférieur ou égal à 40.

On note \bar{B} l'événement contraire de B.

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,2 = \underline{0,8}.$$

3) $A \cap B$ est ici l'événement : Piñder un jìton dont le mècho se termine par 0
(\Rightarrow supérieur ou égal à 41).

$$A \cap B = \{50\} \text{ donc } P(A \cap B) = \frac{1}{50} = \underline{0,02}$$

4) $A \cup B$ = Piñder un jìton terminant par 0 (\Rightarrow supérieur ou égal à 41).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,1 + 0,2 - 0,02 = \underline{0,28}.$$

$$5) E = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48\}.$$

$$P(E) = \frac{12}{50} = 0,24$$

$$F = \{3; 13; 23; 30; 31; 32; 33; 34; 35; 36; 37; 38; 39; 43\}, \text{ donc } P(F) = \frac{14}{50} = 0,28$$

C'est donc l'événement F le plus probable car $0,28 > 0,24$.

Exercise II

a)

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ donc } -3\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} -2+8=6 \\ 5+1=6 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ donc } 2\vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} -4-8=-12 \\ 10-1=9 \end{pmatrix}$$

$$b) \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times 1 - 5 \times 8 = -42$$

Exercise III

$$1) \vec{u} \begin{pmatrix} 2x \\ x-1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires } \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \begin{vmatrix} 2x & -2 \\ x-1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \times 5 - (-2)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 10x + 2(x-1) = 0,$$

$$\Leftrightarrow 10x + 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\mathcal{J} = \left\{ \frac{1}{6} \right\}$$

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires uniquement si $x = \frac{1}{6}$.

$$2) \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -2 \\ x-1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases} \text{ donc } -1 = 6 : \text{absurde.}$$

\vec{u} et \vec{v} ne sont jamais égaux.

Exercice IV

On construit un repère orthonormé sur le maillage donné, l'axe des abscisses est horizontal, celui des ordonnées vertical, une unité de longueur étant la distance qui sépare deux points consécutifs du maillage.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

donc $\overrightarrow{CD} = -1,5\overrightarrow{AB}$, donc \overrightarrow{CD} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires, donc (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice V

0) Construction facile! (géométrique).

$$a) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A = -1 - 1 = -2 \\ y_B - y_A = 3 - (-4) = 7 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -5 - (-1) = -4 \\ -2 - 3 = -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BC}$ car pas les mêmes coordonnées.

$$b) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 14 \\ -48 \end{pmatrix} : \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} -2 & 14 \\ 7 & -48 \end{vmatrix} = -2 \times (-48) - 7 \times 14 \\ \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 96 - 98 = -2.$$

Or $-2 \neq 0$, donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} non colinéaires, donc (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

c) Z appartient à l'axe des ordonnées, donc $x_Z = 0$: $Z(0; y)$.

$Z \in (AB)$, donc Z, A, B sont alignés, donc \overrightarrow{AZ} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires.

$$\overrightarrow{AZ} \begin{pmatrix} -1 \\ y+4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Par suite, $\det(\overrightarrow{AZ}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ y+4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$-7 - (-2)(y+4) = 0$$

$$-7 + 2(y+4) = 0$$

$$-7 + 2y + 8 = 0$$

$$2y + 1 = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{J} = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

Donc $Z\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ est le point d'intersection de (AB) et de l'axe des ordonnées.

d) $M(x; y)$, donc $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x+5 \\ y+2 \end{pmatrix}$.

Par suite, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x-1+x+1+x+5 = 3x+5 \\ y+4+y-3+y+2 = 3y+3 \end{pmatrix}$.

Comme $\vec{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5=0 \\ 3y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -1 \end{cases}$

alors $M\left(-\frac{5}{3}; -1\right)$.

e) K est le milieu de $[BC]$, donc $K\left(\frac{-1+(-5)}{2}; \frac{3+(-2)}{2}\right)$, $K(-3; 0,5)$

f) $\overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} -3-1 \\ 0,5-(-4) \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} -4 \\ 4,5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}-1 \\ -1-(-4) \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$, donc A, M, K alignés.

Bonus : par le même raisonnement, on montre que les points B, K et le milieu N de [AC] sont alignés.

Par suite, K est l'intersection des médianes (AM) et (BN) du triangle ABC.

Culture : le point d'intersection des médianes d'un triangle s'appelle le centre de gravité du triangle.