Première Maths Groupe 4 — Corrigé du DS 2 — Octobre 2022

Exercice I

a)

	Au plus de 100 kg	Plus de 100 kg	Total
Avants	6	15	21
Arrières	11	3	14
Total	17	18	35

b) $P(A) = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad P(B) = \frac{18}{35}$

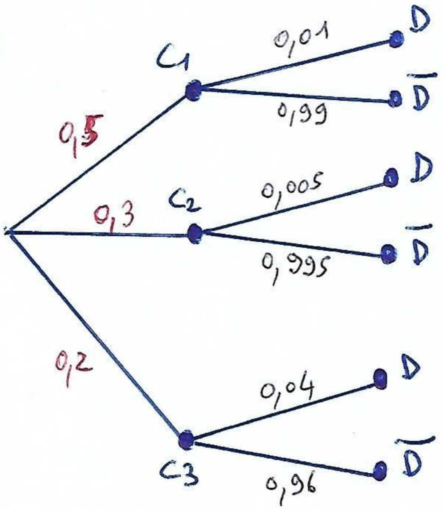
$P(C) = P(A \cap B) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$

$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{21}{35} + \frac{18}{35} - \frac{15}{35} = \frac{24}{35}$

c) On cherche ici $P_A(B)$: $\boxed{P_A(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{18}{35}} = \frac{3}{7} \times \frac{35}{18} = \frac{3 \times 7 \times 5}{7 \times 3 \times 6} = \boxed{\frac{5}{6}}$

Exercice II

1)



2) On cherche ici la valeur de $P(C_3 \cap D)$:

Or $\underline{P(C_3 \cap D)} = P(C_3) \times P_{C_3}(D) = 0{,}2 \times 0{,}04 = \underline{0{,}008}$.

3) D'après la formule des probabilités totales :

$P(D) = P(C_1 \cap D) + P(C_2 \cap D) + \underbrace{P(C_3 \cap D)}$

$P(D) = 0{,}5 \times 0{,}01 + 0{,}3 \times 0{,}005 + 0{,}008$ (q.2).

$P(D) = 0{,}005 + 0{,}0015 + 0{,}008$

$\boxed{P(D) = 0{,}0145}$

4) On cherche ici la valeur de $P_D(C_3)$:

Or d'après la formule des probabilités conditionnelles :

$P_D(C_3) = \frac{P(C_3 \cap D)}{P(D)} \overset{q.2) \text{ et } 3)}{=} \frac{0{,}008}{0{,}0145}$ donc $\boxed{P_D(C_3) \simeq 0{,}5517 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}}$

Exercice III

1) i) Il faut résoudre l'équation : $f(x)=0$ à savoir ici $7x^2+5x-48=0$.

ii) $7x^2+5x-48=0$.

Ici, $a=7$, $b=5$ et $c=-48$.

$\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\times7\times(-48) = 25+1344 = 1369$

$\Delta>0$ donc cette équation a pour solutions : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-\sqrt{1369}}{14} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+\sqrt{1369}}{14} \end{cases}$

$$\boxed{S = \left\{\frac{-5-\sqrt{1369}}{14} \; ; \; \frac{-5+\sqrt{1369}}{14}\right\}}$$

donc $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en les points : $A\left(\frac{-5-\sqrt{1369}}{14} \; ; 0\right)$ et $B\left(\frac{-5+\sqrt{1369}}{14} \; ; 0\right)$.

2) $f(x) = 7x^2+5x-48$.

$a>0$, donc « f décroît puis croît ensuite ».

Plus précisément : $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{14}$

donc :

x	$-\infty$	$\frac{-5}{14}$	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗

$S\left(-\frac{5}{14} \; ; y_S\right)$ avec $y_S = f\left(-\frac{5}{14}\right) = 7\times\left(\frac{-5}{14}\right)^2 + 5\times\left(\frac{-5}{14}\right) - 48$.

$y_S = 7\times\frac{25}{196} - \frac{20}{14} - 48 = \frac{175}{196} - \frac{280}{196} - \frac{672}{196}$

$y_S = -\frac{777}{196}$

donc $\boxed{S\left(-\frac{5}{14} \; ; -\frac{777}{196}\right)}$

Exercice IV

$T(x) = 2x^2+3x-5$. (Ici $a=2$; $b=3$; $c=-5$).

T a pour racine évidente $x_1=1$. donc en notant x_2 sa seconde racine on a :

$x_1\times x_2 = \frac{c}{a}$ donc $x_2 = \frac{-5}{\;}$

Par suite $T(x)$ se factorise en : $T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

donc $T(x) = 2(x-1)\left(x - \left(\frac{-5}{2}\right)\right)$

$$\boxed{T(x) = 2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right).}$$

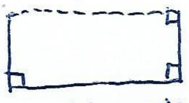
Exercice V

i) x est une longueur, donc $x \geq 0$.

De plus, $x \leq 160$.

Donc $0 \leq x \leq 160$, donc $\boxed{x \in [0;160]}$.

ii)



On a : $2y + x = 160$ donc $y = \frac{160-x}{2} = 80 - \frac{x}{2}$.

aire d'un rectangle!

et $f(x) = x \times y = x\left(80 - \frac{x}{2}\right) = 80x - \frac{x^2}{2}$

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 80x}.$$

iii) f est une fonction polynôme du second degré, avec : $a = -\frac{1}{2}$; $b = 80$ et $c = 0$.

Vu que $a < 0$, f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{2 \times (-\frac{1}{2})} = 80$

Or $80 \in [0;160]$.

Il faut donc donner à la longueur de ce rectangle la valeur de 80 mètres pour obtenir une zone de baignade d'aire maximale.

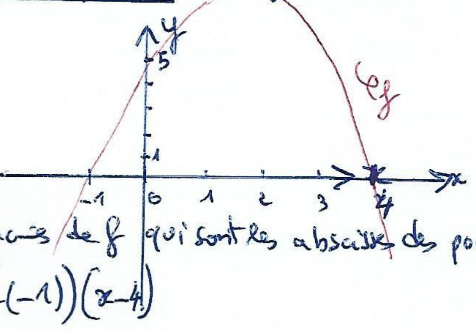
La largeur vaut : $y = 80 - \frac{80}{2} = 80 - 40 = 40$ m

L'aire maximale de baignade est $f(40) = 80 \times 40 = 3200$ m^2.

Exercice VI

Croquis :

$f(x) = ax^2 + bx + c$



On connait les racines de f qui sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des x.

On factorise $f(x)$:

$f(x) = a(x - (-1))(x-4)$

$f(x) = a(x+1)(x-4)$

De plus, $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point $C(0;5)$, donc $f(0) = 5$

$f(0)=5$ équivaut à : $a(0+1)(0-4)=5$ donc à $-4a=5$

donc $a=\frac{5}{-4}=-\frac{5}{4}$.

Par suite, $f(x)=-\frac{5}{4}(x+1)(x-4)$

$f(x)=-\frac{5}{4}(x^2-4x+x-4)$

$f(x)=-\frac{5}{4}(x^2-3x-4)$

$$\boxed{f(x)=-\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{4}x+5}$$

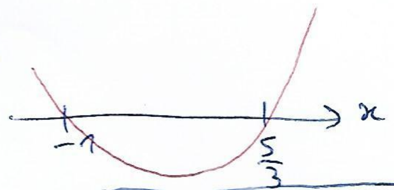
Exercice VII

a) $3x^2-2x-5>0$. Ici $a=3$; $b=-2$; $c=-5$.

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-5)=4+60=64=8^2$

$\Delta>0$ donc ce trinôme a deux racines : $\begin{cases} x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-8}{6}=\frac{-6}{6}=-1 \\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+8}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}. \end{cases}$

$a>0$



donc

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x^2-2x-5$		+	0	−	0	+	

Par suite, $3x^2-2x-5>0$ équivaut à $x<-1$ ou $x>\frac{5}{3}$.

$$\boxed{S=\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]\frac{5}{3}\,;+\infty\right[}.$$

b) $x(x+2)\leqslant-1$ équivaut à :

$x^2+2x\leqslant-1$

$\underbrace{x^2+2x+1}\leqslant0$

$(x+1)^2\leqslant0$ (I.R n°2).

Cette inégalité est vraie seulement si $x+1=0$, à savoir $x=-1$, car pour tout réel x $(x+1)^2\geqslant0$. Donc $\boxed{S=\{-1\}}$.

Exercice VIII

On doit prouver que pour tout réel x, $f(x)>g(x)$ c'est-à-dire que $x^2>2x-2$.

Résolvons donc l'inéquation : $x^2>2x-2$:

$x^2 > 2x-2$ équivaut à $x^2-2x+2>0$. ⑤

$a=1$; $b=-2$; $c=2$. $\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times1\times2 = 4-8 = -4$.

$\Delta<0$, donc pour tout réel x, x^2-2x+2 a le même signe que a ($=1$), donc pour tout réel x, $x^2-2x+2>0$ c'est-à-dire: $x^2>2x-2$.

donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$