Exercice d'échauffement

1) Un vecteur normal est : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-ln(2)\\ ln(2)\\ ln(4)\end{pmatrix}$, donc comme $\ln(4)=\ln(2^2)=2\ln(2)$, $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ est un autre vecteur normal à (P). Donc une équation cartésienne de (P) est de la forme : $-x+y+2z+d=0$, où d est un réel.

$A(0\ ;\ -2\ ;\ 1)\in(P) \Leftrightarrow -0-2+2\times1+d=0 \Leftrightarrow d=0$.

Ainsi $-x+y+2z=0$ est une équation cartésienne de (P).

2) Les points $A(0\ ;\ -2\ ;\ 1)$, $B(3\ ;\ -1\ ;\ -2)$ et $C(-1\ ;\ 1\ ;\ -1)$ appartiennent au plan (P). On vérifie facilement que ces points ne sont pas alignés, donc par axiome d'incidence, (P) est le plan (ABC).

$D(e^2\ ;\ -e^2\ ;\ 3e^2))\in(ABC) \Leftrightarrow -e^2-e^2+6\times e^2=0 \Leftrightarrow 4e^2=0$: absurde.

Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3) $\widehat{BAC}$ est la mesure de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\widehat{BAC}=\left|(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})\right|$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -2\end{pmatrix}$ donc :

AB = $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{3^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{19}$ et AC = $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-1)+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$.

Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=xx'+yy'+zz'=-3+3+6=6$.

$D'autre\ part,\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$, donc on a : 6 = $AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.

Donc $\cos(\widehat{BAC})=\frac{6}{\sqrt{19}\times\sqrt{14}}$ et avec la calculatrice, $\widehat{BAC}\approx 68{,}4°$: affirmation vraie !

Exercice I

1. On détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$.

   Ces vecteurs ont des coordonnées qui sont clairement non proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, et donc les trois points A, B et C ne sont pas alignés : ils déterminent bien un plan.

2. Comme le repère est orthonormal, en utilisant les coordonnées des vecteurs précédents, qui sont non nuls, on va calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2\times(-1)+1\times(-2)+5\times0=2+-2+0=0$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls, mais leur produit scalaire l'est, donc les droites (AB) et (AC) sont orthogonales, et donc le triangle ABC est bien rectangle en A.

3. **a.** Calculons le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ces deux vecteurs formant une base du plan (ABC).

   - $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(-2)+(-1)\times1+1\times5=-4-1+5=0$;
   - $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-1)+(-1)\times(-2)+1\times0=-2+2+0=0$;

   $\overrightarrow{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs formant une base de (ABC), il est donc orthogonal à (ABC).

   Toute droite dirigée par $\overrightarrow{u}$, et donc Δ, est donc orthogonale à (ABC).

b. $\overrightarrow{u}$ est donc un vecteur normal au plan (ABC), d'après la question précédente. Par propriété, on en déduit qu'une équation de (ABC) est de la forme :

$2x - y + z + d = 0$ où d est un réel.

$$\begin{aligned} A \in (ABC) &\iff 2x_A - y_A + z_A + d = 0 \\ &\iff 2 \times 1 - 3 + 0 + d = 0 \\ &\iff -1 + d = 0 \\ &\iff d = 1 \end{aligned}$$

Une équation de (ABC) est donc bien $2x - y + z + 1 = 0$.

c. Δ contient D$(-2\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et est dirigée par $\overrightarrow{u}$, donc, par propriété, une représentation paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

4. Considérons M_t, le point de paramètre t sur la droite Δ.

$$\begin{aligned} M_t \in (ABC) &\iff 2x_{M_t} - y_{M_t} + z_{M_t} + 1 = 0 \\ &\iff 2(-2 + 2t) - (2 - t) + (1 + t) + 1 = 0 \\ &\iff -4 + 4t - 2 + t + 1 + t + 1 = 0 \\ &\iff 6t - 4 = 0 \\ &\iff t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Δ n'a qu'un seul point sur (ABC) (c'est normal, comme elle est orthogonale au plan, elle est sécante au plan), c'est le point de paramètre $\frac{2}{3}$ dans la représentation, c'est-à-dire que c'est le point de coordonnées $\left(-2 + 2 \times \frac{2}{3}\ ;\ 2 - \frac{2}{3} ; 1 + \frac{2}{3}\right)$, soit $\left(-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\ ;\ \frac{5}{3}\right)$.

On reconnaît les coordonnées du point H. H est donc l'intersection de Δ et (ABC), c'est donc l'intersection du plan (ABC) avec la droite passant par D et orthogonale à (ABC) : H est le projeté orthogonal de D sur (ABC).

5. **a.** On est dans un repère orthonormé :

$$\begin{aligned} DH &= \sqrt{\left(-\frac{2}{3} - (-2)\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{\sqrt{4 \times 6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

On arrive bien à la distance annoncée : $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

b. Pour le tétraèdre ABCD, on va choisir comme base le triangle ABC, rectangle en A, et la hauteur correspondante, est donc la distance de H au plan (ABC), c'est-à-dire la distance DH.

Pour calculer B, l'aire de la base, on va utiliser comme base de ABC la longueur AB, et comme hauteur correspondante, la longueur AC (car ABC est rectangle en A).

Donc : $$\begin{aligned} B &= \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2} \times \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2}}{2} = \frac{\sqrt{30} \times \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Le volume du tétraèdre est donc : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{2}\sqrt{6} \times \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$
$= \dfrac{10}{3}$

Le volume du tétraèdre est donc de $\dfrac{10}{3} \approx 3,33$.

6. Par lecture de la représentation paramétrique de d, on peut dire que la droite d est dirigée par : $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u'} = 2 \times (-2) + (-1) \times -3 + 1 \times 1$
$= -4 + 3 + 1 = 0$

$\overrightarrow{u'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ qui est lui-même un vecteur normal à (ABC). On en déduit que $\overrightarrow{u'}$ est un vecteur du plan (ABC). Ainsi, la droite d est une droite parallèle au plan (ABC).

Remarque : bien que ça ne soit pas demandé ici, on peut préciser : d passe par le point E de coordonnées $(1;0;1)$. Ces coordonnées ne vérifiant pas l'équation de (ABC), on en déduit que E n'appartient pas au plan, et donc que d est strictement parallèle à (ABC) (elle n'est pas incluse dans le plan).

Exercice II

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x-3y+2z-9=0$ et le plan $\mathscr{P}'$ d'équation cartésienne $x-y-z+2=0$.

2. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$, le vecteur $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}'$. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires car $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{2}{-1}$. Donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont ni parallèles ni confondus. Ils sont donc sécants. Leur intersection est donc une droite (d).

b. $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 3+3-2 = 4 \neq 0$ donc les plans ne sont pas perpendiculaires.

(d) est la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ dont les vecteurs normaux sont respectivement $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v'}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Pour montrer que $\overrightarrow{u}$ dirige (d), il suffit de prouver que ce vecteur est contenu dans chacun des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, soit $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v'} = 0$

Or, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1 \times 3 + 1 \times (-3) = 0$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$.

Ainsi, (d) est bien dirigée par $\overrightarrow{u}$.

3. On remplace les coordonnées de M dans les deux équations de plans :

- $6-3+6-9=12-12=0$ donc $M \in \mathscr{P}$;
- $2-1-3+2=4-4=0$ donc $M \in \mathscr{P}'$.

La droite (d) passe donc par M et a pour vecteur directeur (d) : $\overrightarrow{u}$ donc

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z=3 \end{cases}$$

4. On cherche l'intersection de (ABC) et de (d). On résout le système :

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=3 \\ -x+y+4z-11=0 \end{cases}$$. S'il admet une infinité de solutions alors $(d) \subset (ABC)$.

On remplace x, y et z dans la dernière équation :

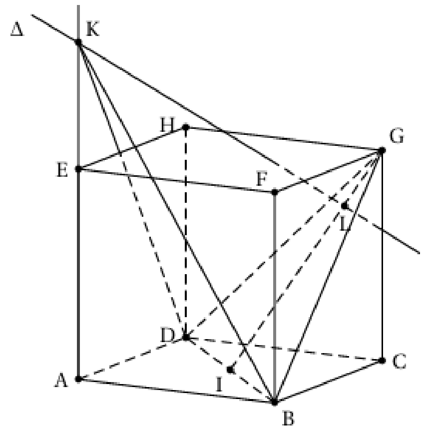
$-x+y+4z-11=0 \Rightarrow -(2+t)+1+t+4\times 3-11=0 \iff 0=0$. La dernière équation est vérifiée quelque soit la valeur de t. Donc ce système admet une infinité de solutions. $(d) \subset (ABC)$

Donc la droite (d) appartient aux trois plans (ABC), $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Reprenons les trois vecteurs normaux des trois plans : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n_1}$ ne sont pas colinéaires, de même pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n_2}$. Le plan (ABC) n'est donc confondu ni avec $\mathscr{P}$ ni avec $\mathscr{P}'$. Ces trois plans sont simplement sécants, d'intersections (d).

Exercice III

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** $D(0;1;0)$, $B(1;0;0)$, $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ et $G(1;1;1)$

b.
- $\overrightarrow{IL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_L-x_I\\y_L-y_I\\z_L-z_I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_L-\frac{1}{2}\\y_L-\frac{1}{2}\\z_L-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_L-\frac{1}{2}\\y_L-\frac{1}{2}\\z_L\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{IG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_G-x_I\\y_G-y_I\\z_G-z_I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\1-\frac{1}{2}\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{IL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IG} \iff \begin{cases} x_L-\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2} \\ y_L-\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2} \\ z_L = \frac{3}{4}\times 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_L = \frac{3}{8}+\frac{1}{2} \\ y_L = \frac{3}{8}+\frac{1}{2} \\ z_L = \frac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x_L = \frac{7}{8} \\ y_L = \frac{7}{8} \\ z_L = \frac{3}{4} \end{cases}$$

2. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+y-z-1=0$.

- $x_B+y_B-z_B-1=1+0-0-1=0$ donc $B\in\mathscr{P}$.
- $x_D+y_D-z_D-1=0+1-0-1=0$ donc $D\in\mathscr{P}$.

- $x_G+y_G-z_G-1=1+1-1-1=0$ donc $G\in\mathscr{P}$.

Donc le plan (BDG) a pour équation cartésienne $x+y-z-1=0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

a. (BDG) a pour équation $x+y-z-1=0$, donc il a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

La droite Δ est perpendiculaire au plan (BDG) donc elle a le vecteur $\overrightarrow{n}$ comme vecteur directeur. Donc la droite Δ est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\overrightarrow{LM}=t\overrightarrow{n}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{LM}=t\overrightarrow{n}\iff\left\{\begin{array}{rcl}x-\frac{7}{8}&=&t\times 1\\y-\frac{7}{8}&=&t\times 1\\z-\frac{3}{4}&=&t\times(-1)\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&\frac{7}{8}+t\\y&=&\frac{7}{8}+t\\z&=&\frac{3}{4}-t\end{array}\right.\quad\text{où } t\in\mathbb{R}$$

b. Soit K le point de coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{13}{8}\right)$.

- On regarde si les coordonnées de K vérifient la représentation paramétrique de Δ, autrement dit on cherche s'il existe un réel t tel que ; $\left\{\begin{array}{rcl}0&=&\frac{7}{8}+t\\0&=&\frac{7}{8}+t\\\frac{13}{8}&=&\frac{3}{4}-t\end{array}\right.$

  Le réel $t=-\dfrac{7}{8}$ convient donc $K\in\Delta$.

- $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{13}{8}\end{pmatrix}$.

  Donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires donc $K\in(AE)$.

Les deux droites Δ et (AE) sont donc sécantes en K.

c.
- $\overrightarrow{IL}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{IG}$ donc $L\in(IG)$ donc $L\in(BDG)$.
- La droite Δ est perpendiculaire au plan (BDG) en L.
- $K\in\Delta$

Donc le point L est le projeté orthogonal du point K sur le plan (BDG).

4. a. K a pour coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{13}{8}\right)$ et L a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{8}\ ;\ \dfrac{7}{8}\ ;\ \dfrac{3}{4}\right)$. Donc

$$KL^2=\left(\frac{7}{8}-0\right)^2+\left(\frac{7}{8}-0\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{13}{8}\right)^2=\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(-\frac{7}{8}\right)^2=\frac{49}{64}+\frac{49}{64}+\frac{49}{64}=\frac{147}{64}$$

donc $KL=\dfrac{\sqrt{147}}{8}=\dfrac{7\sqrt{3}}{8}$

b. On admet que le triangle DBG est équilatéral, donc chaque angle mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

Le point I est le milieu de [BD] donc I est aussi le pied de la hauteur issue de G dans le triangle DBG.

Dans le triangle GIB rectangle en I, on a : $\sin\left(\widehat{IBG}\right)=\dfrac{IG}{BG}$.

BG est la diagonale du carré BCGF de côté 1, donc $BG = \sqrt{2}$. De même $BD = \sqrt{2}$.

On a donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{IG}{BG}$, donc $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{IG}{\sqrt{2}}$ et donc $IG = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

L'aire du triangle BDG vaut : $\dfrac{BD \times IG}{2} = \dfrac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c. Le tétraèdre KDBG a pour base le triangle BDG et pour hauteur KL, donc son volume vaut : $\dfrac{1}{3} \times \text{aire(BDG)} \times KL = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{7\sqrt{3}}{8} = \dfrac{7}{16}$

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ a)$.

a. On exprime le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide $ABCDK_a$ en fonction de a.

- La base de la pyramide est le carré ABCD d'aire 1.
- Le point K_a a pour coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ a)$ donc il appartient à la droite (AE) et donc AK_a est la hauteur de la pyramide $ABCDK_a$.
- De façon évidente, $AK_a = a$.

Donc $\mathcal{V}_a = \dfrac{1}{3} \times a \times 1 = \dfrac{a}{3}$.

b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t' \\ y &=& t' \\ z &=& -t'+a \end{array}\right.$ où $t' \in \mathbb{R}$.

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).

Les coordonnées de L_a vérifient le système $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t' \\ y &=& t' \\ z &=& -t'+a \\ x+y-z-1 &=& 0 \end{array}\right.$

On a donc $t' + t' - (-t' + a) - 1 = 0$ soit $3t' = a + 1$ donc $t' = \dfrac{a+1}{3}$.

$x = t' = \dfrac{a+1}{3}$; $y = t' = \dfrac{a+1}{3}$ et $z = -t' + a = -\dfrac{a+1}{3} + a = \dfrac{-a-1+3a}{3} = \dfrac{2a-1}{3}$

Donc les coordonnées du point L_a sont $\left(\dfrac{a+1}{3}\ ;\ \dfrac{a+1}{3}\ ;\ \dfrac{2a-1}{3}\right)$.

c. On cherche le volume du tétraèdre $GDBK_a$.

- $K_aL_a{}^2 = \left(\dfrac{a+1}{3} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{a+1}{3} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{2a-1}{3} - a\right)^2$
  $= \left(\dfrac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{-a-1}{3}\right)^2 = 3 \times \dfrac{(a+1)^2}{9} = \dfrac{(a+1)^2}{3}$

  Donc $K_aL_a = \dfrac{a+1}{\sqrt{3}}$.
- Le volume du tétraèdre $GDBK_a$ est :
  $\dfrac{1}{3} \times K_aL_a \times \text{aire(GBD)} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a+1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a+1}{6}$

Le tétraèdre $GDBK_a$ et la pyramide $ABCDK_a$ sont de même volume si et seulement si $\dfrac{a+1}{6} = \dfrac{a}{3}$, soit $\dfrac{a+1}{6} = \dfrac{2a}{6}$, soit $a + 1 = 2a$, et donc si $a = 1$.