**Exercice I et II**

1) a) $f(x) = e^{-3x} + 4x^2 + x - 1$

$$\boxed{F(x) = -\frac{e^{-3x}}{3} + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x}$$

b) $g(x) = -6x e^{x^2}$. Posons : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$.

$g(x) = -3 \times 2x e^{x^2}$

$g(x) = -3u'(x)e^{u(x)}$ donc $\boxed{G(x) = -3e^{x^2}}$

c) $h(x) = \dfrac{1+e^x-2e^{-x}}{x+e^x+2e^{-x}}$. Posons $\begin{cases} u(x) = x+e^x+2e^{-x} \\ u'(x) = 1+e^x-2e^{-x}. \end{cases}$

$h(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Donc $\boxed{H(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(x+e^x+2e^{-x})}$ (car $x>0$).

d) $i(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{24}{x^2} + \cos(3x) - 5\sin(2x-1)$.

$i(x) = 3 \times \dfrac{1}{x} - 24 \times \dfrac{1}{x^2} + \cos(3x) - 5\sin(2x-1)$.

Donc $\boxed{I(x) = 3\ln(x) + \frac{24}{x} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{5\cos(2x-1)}{2}}$ $(x>0)$.

e) $k(x) = 2x(x^2+2)^3$. Soit $\begin{cases} u(x) = x^2+2 \\ u'(x) = 2x. \end{cases}$

$k(x) = u'(x)(u(x))^3$.

Donc $K(x) = \dfrac{(u(x))^4}{4} + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$K(x) = \dfrac{(x^2+2)^4}{4} + \lambda$.

$K(2) = 0 \iff \dfrac{(2^2+2)^4}{4} + \lambda = 0 \iff \lambda = -\dfrac{6^4}{4} = -324$.

Donc $\boxed{K(x) = \underline{(x^2+2)^4} - 324}$

2) $M(x)=(-x^2-5x-7)e^{-x}=u(x)v(x)$ où : $\begin{cases} u(x)=-x^2-5x-7 \\ u'(x)=-2x-5 \end{cases}$

$M'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ $\qquad \begin{cases} v(x)=e^{-x} \\ v'(x)=-e^{-x}. \end{cases}$

$M'(x)=(-2x-5)e^{-x}+(-x^2-5x-7)\times(-e^{-x})$

$M'(x)=(-2x-5)e^{-x}+(x^2+5x+7)e^{-x}$

$M'(x)=(-2x-5+x^2+5x+7)e^{-x}=(x^2+3x+2)e^{-x}=m(x).$

Donc <u>$M$ est une primitive de $m$ sur $\mathbb{R}$.</u>

3) Notons $\gamma=\omega'(1+2\omega)+\dfrac{\omega'}{\omega}$.

$\gamma=\omega'+2\omega'\omega+\dfrac{\omega'}{\omega}$.

Donc une primitive $\Gamma$ de $\gamma$ est : $\boxed{\Gamma=\omega+\omega^2+\ln(\omega)}$ car $\omega$ à valeurs positives.

1) $g(x)=1+2e^{-x^2+5}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$, donc $e^{-x^2+5}>0$, donc $2e^{-x^2+5}>0$ et par suite $1+2e^{-x^2+5}>1>0$ : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)>0$.

Soit $G$ une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$ : $\forall x\in\mathbb{R}$, $G'(x)=g(x)$ et $g(x)>0$, donc $G'(x)>0$ et <u>$G$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>L'affirmation est FAUSSE.</u>

2) $F_k(x)=k\ln(e^x+5)=k\ln(u(x))$ avec : $\begin{cases} u(x)=e^x+5 \\ u'(x)=e^x \end{cases}$.

$F_k'(x)=\dfrac{ke^x}{e^x+5}$

$F_k'(x)=f(x) \iff \forall x\in\mathbb{R},\ \dfrac{ke^x}{e^x+5}=\dfrac{6}{1+5e^{-x}}=\dfrac{6}{1+\frac{5}{e^x}}=\dfrac{6e^x}{e^x+5}$

$\iff \boxed{k=6}$ Donc $F_k$ est une primitive de $f$ ssi $k=6$