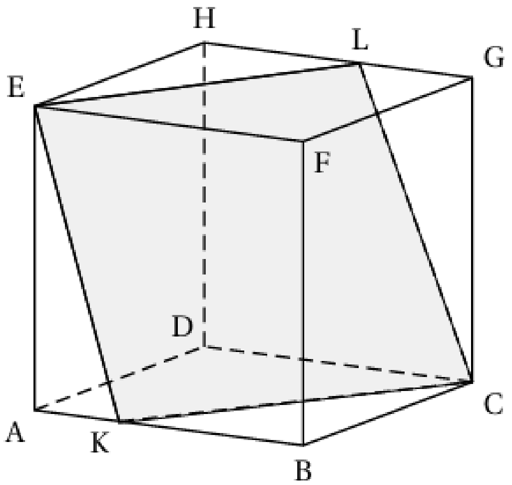
Exercice I

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.
Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0;\,1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$K\,(m\,;\,0\,;\,0) \quad \text{et} \quad L\,(1-m\,;\,1\,;\,1).$$



1. Le point E a pour coordonnées $(0;\,0;\,1)$.
   Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, le point C a pour coordonnées $(1\,;\,1\,;\,0)$.
2. Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point L $(1\,;\,1\,;\,1)$ est confondu avec le point G, le point K$(0\,;\,0\,;\,0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).

   a.
   - ABCD est un carré donc ses diagonales sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AC}$.
   - Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est normal au plan (ABD) donc $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal à tout vecteur du plan (ABD), donc $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{DB}$.
   - Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

   Le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GEA) donc le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est normal au plan (GEA).

   b. On déduit de la question précédente que le plan (GEA) a une équation de la forme $1 \times x + (-1) \times y + 0 \times z + d = 0$, soit $x - y + d = 0$.

   Le plan (GEA) passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,0)$ donc $0 - 0 + d = 0$ et donc $d = 0$.

   Le plan (GEA) a donc pour équation $x - y = 0$.

On s'intéresse désormais à la nature de CKEL en fonction du paramètre m.

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0;\,1]$.

   a.
   - $K\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-m \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   - $C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-m-1 \\ 1-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{CL}$ donc CKEL est un parallélogramme.

b. K$\begin{pmatrix}m\\0\\0\end{pmatrix}$ et C$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{KC}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-m\\1-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-m\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{KC}}\cdot\overrightarrow{\text{KE}} = x_{\overrightarrow{\text{KC}}}\times x_{\overrightarrow{\text{KE}}}+y_{\overrightarrow{\text{KC}}}\times y_{\overrightarrow{\text{KE}}}+z_{\overrightarrow{\text{KC}}}\times z_{\overrightarrow{\text{KE}}} = (1-m)\times(-m)+1\times 0+0\times(-1) = m(m-$

c. CKEL est un rectangle si, et seulement si, CKEL possède un angle droit

si, et seulement si, $\overrightarrow{\text{KC}}\perp\overrightarrow{\text{KE}}$

si, et seulement si, $\overrightarrow{\text{KC}}\cdot\overrightarrow{\text{KE}}=0$

si, et seulement si, $m(m-1)=0$

si, et seulement si, $m=0$ ou $m=1$

4. Dans cette question, $m=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$.

a.
- K$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ et L$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{KL}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\1-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.
- E$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et C$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{EC}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{\text{KL}}\cdot\overrightarrow{\text{EC}}=0\times1+1\times1+1\times(-1)=0$ donc $\overrightarrow{\text{KL}}\perp\overrightarrow{\text{EC}}$

Le parallélogramme CKEL a ses diagonales perpendiculaires donc c'est un losange.

b.
- $\overrightarrow{\text{KC}}\cdot\overrightarrow{\text{KE}}=m(m-1)$; or $m=\dfrac{1}{2}$ donc $\overrightarrow{\text{KC}}\cdot\overrightarrow{\text{KE}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)=-\dfrac{1}{4}$
- $\overrightarrow{\text{KC}}\cdot\overrightarrow{\text{KE}}=\text{KC}\times\text{KE}\times\cos\left(\widehat{\text{CKE}}\right)$
- $\overrightarrow{\text{KC}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-m\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$

  Donc $\text{KC}^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2+0^2=\dfrac{5}{4}$ donc $\text{KC}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
- $\overrightarrow{\text{KE}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-m\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$

  Donc $\text{KE}^2=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2=\dfrac{5}{4}$ donc $\text{KE}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

On a donc : $-\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\cos\left(\widehat{\text{CKE}}\right)$

Donc $-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}\times\cos\left(\widehat{\text{CKE}}\right)$ et donc $\cos\left(\widehat{\text{CKE}}\right)=-\dfrac{1}{5}$

On en déduit avec la calculatrice que $\widehat{\text{CKE}}\approx 101{,}5°$, soit $\widehat{\text{CKE}}\approx 102°$.

Exercice II

1. **a.** Dans le repère $\left(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on a les points suivants :
H(0 ; 2 ; 2), M(3 ; 0 ; 1) et N(3 ; 1 ; 1).

b. On a $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x_M - x_H \\ y_M - y_H \\ z_M - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (HM) est dirigée par $\overrightarrow{HM}$ et elle passe par H, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_H + t x_{\overrightarrow{HM}} \\ y = y_H + t y_{\overrightarrow{HM}} \\ z = z_H + t z_{\overrightarrow{HM}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

2. Dans le repère $\left(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on a les coordonnées suivantes :

B(2 ; 0 ; 0) C(2 ; 2 ; 0) F(2 ; 0 ; 2)

Le plan (BCF) est parallèle au plan yOz, son équation est donc de la forme $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ici on a donc $x = 2$

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de (HM) soit un point de (BCF) :

$$M_t \in (BCF) \iff x_{M_t} = 2 \iff 3t = 2 \iff t = \frac{2}{3}$$

P est donc $M_{\frac{2}{3}}$ sur la droite (HM), il a donc comme coordonnées :

$x_P = 2$, $y_P = 2 - 2 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$ et $z_P = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Cela confirme $P\left(2 ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{4}{3}\right)$

3. **a.** $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} x_M - x_P \\ y_M - y_P \\ z_M - z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-\frac{2}{3} \\ 1-\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et de même : $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées :

$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 1 \times 1 - \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) = 1 - \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$

b. $PM = \sqrt{1^2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{14}{9}} = \dfrac{\sqrt{14}}{3}$

c. On sait que $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = PM \times PN \times \cos\left(\widehat{MPN}\right)$.

On a donc $\dfrac{8}{9} = \dfrac{\sqrt{14}}{3} \times \dfrac{\sqrt{11}}{3} \times \cos\left(\widehat{MPN}\right)$.

d'où $\cos\left(\widehat{MPN}\right) = \dfrac{8}{\sqrt{11}\sqrt{14}}$ soit $\widehat{MPN} \approx 50°$.

L'angle ne dépasse pas 55°, le toit peut donc être construit.

4. Les droites (EH) et (MN) sont parallèles donc les droites (HM) et (EN) sont coplanaires et non parallèles , elles sont donc sécantes.

On a $\overrightarrow{\text{EN}}\begin{pmatrix} x_\text{N}-x_\text{E}\\ y_\text{N}-y_\text{E}\\ z_\text{N}-z_\text{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

La droite (EN) est dirigée par $\overrightarrow{\text{EN}}$ et elle passe par E, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_\text{E} + t x_{\overrightarrow{\text{EN}}}\\ y = y_\text{E} + t y_{\overrightarrow{\text{EN}}}\\ z = z_\text{E} + t z_{\overrightarrow{\text{EN}}}\end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = 3t'\\ y = t'\\ z = 2-t'\end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$

Pour trouver l'intersection des droites (EH) et (MN), il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 3t = 3t'\\ 2-2t = t'\\ 2-t = 2-t'\end{cases} \iff \begin{cases} t = t'\\ 2-2t = t\\ 2-t = 2-t\end{cases} \iff \begin{cases} t = t'\\ 2 = 3t\\ 0 = 0\end{cases} \iff t = t' = \frac{2}{3}$$

P est donc le point d'intersection de ces deux droites.

Exercice III

1. **a.** On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (en comparant les premières coordonnées, s'il l'étaient on aurait $\overrightarrow{\text{AB}} = 2\overrightarrow{\text{AC}}$, ce qui est faux), donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan unique $\mathscr{P}$.

b. On a $\overrightarrow{\text{CD}}\begin{pmatrix}2\\1\\\cdot\end{pmatrix}$, puis

2. **a.** On a grâce aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{CD}}$, $\text{CD}^2 = 4+1+1 = 6$, d'où $\text{CD} = \sqrt{6}$.

b. Puisque C est le projeté orthogonal de D sur le plan $\mathscr{P}$, ce point est celui qui est à la plus courte distance du point D, soit $\sqrt{6}$: il n'existe donc pas d'autre point de $\mathscr{P}$ situé à cette distance $\sqrt{6}$ de D;

Ou encore : la sphère de centre D et de rayon $\sqrt{6}$ est tangente en C au plan $\mathscr{P}$, donc quel que soit M dans $\mathscr{P}$, le triangle DCM est rectangle en C, d'hypoténuse [DM] et l'on sait qu'alors $\text{DM} > \text{DC} = \sqrt{6}$: tout point M du plan aurez que C est donc à une distance supérieure à $\sqrt{6}$ de D.

3. **a.** Si $M(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à Δ et à $\mathscr{P}$ ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x &=& 0\\ y &=& 2+t\\ z &=& -1+t\\ 2x+y-z-3 &=& 0\end{cases}$$, avec $t \in \mathbb{R} \Rightarrow 2\times 0 + 2 + t - (-1+t) - 3 = 0 \iff 0 = 0$: ceci signifie que tout point de Δ appartient à $\mathscr{P}$ donc que Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ.

b. Un vecteur directeur de la droite Δ est $\delta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et avec $\text{H}(0\,;\,2+t\,;\,-1+t)$, on a $\overrightarrow{\text{DH}}\begin{pmatrix}4\\3+t\\1+t\end{pmatrix}$.

Or (DH) $\perp \Delta \Rightarrow \delta \cdot \overrightarrow{DH} = 0 \iff 0+3+t+1+t=0 \iff 4+2t=0 \iff 2t=-4 \iff t=-2$.
On a donc H$(0\,;\,0\,;\,-3) \in \Delta$.

c. On a donc $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}4\\3-2\\1-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$; il en résulte que $DH^2 = 4^2+1^2+(-1)^2 = 18$.

Finalement $DH = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Exercice IV

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(-1\,;\,-3\,;\,2),\qquad B(3\,;\,-2\,;\,6)\quad \text{et}\quad C(1\,;\,2\,;\,-4).$$

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\5\\-6\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés : ils définissent donc un plan $\mathscr{P}$.

2. **a.** On a :

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 4\times 13 + 1\times(-16) + 4\times(-9) = 52-16-36 = 52-52 = 0$;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 13 + 5\times(-13) + (-6\times(-9) = 26-65+54 = 52-52 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$: il est normal à ce plan.

b. On sait que $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff ax+by+cz+d=0$ et que a, b et c sont les composantes d'un vecteur normal à ce plan donc par exemple $\vec{n}$.
On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 13x-16y-9z+d=0$.
par exemple $C(1\,;\,2\,;\,-4) \in \mathscr{P} \iff 13\times 1+2\times(-16)-9\times(-4)+d = 0+d=0 \iff 13-32+36+d=0 \iff 17+d=0 \iff d=-17$.
On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 13x-16y-9z-17=0$.

On note $\mathscr{D}$ la droite passant par le point F(15 ; −16 ; −8) et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

3. La droite $\mathscr{D}$ étant orthogonale au plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan $\mathscr{P}$.

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{\text{F}M} = t\overrightarrow{n}, \quad t \in \mathbb{R}$, soit $\left\{\begin{array}{rcl} x-15 &=& 13t \\ y+16 &=& -16t \\ z+8 &=& -9t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}$

4. Si E$(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à la droite $\mathscr{D}$ et au plan $\mathscr{P}$, ses coordonnées vérifient les équations de la droite et celle du plan donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-15 &=& 13t \\ y+16 &=& -16t \\ z+8 &=& -9t \\ 13x-16y-9z-17 &=& 0 \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans l'équation du plan, on obtient :

$13(13t+15)-16(16t-16)-9(-9t-8)-17 = 0 \iff 169t+195+256t+256+81t+72-17 = 0 \iff 506t+506 = 0 \iff t = -1.$

En reportant cette valeur dans les équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$, on obtient :

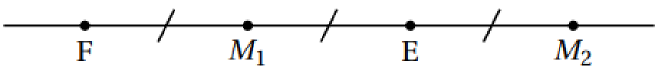
$$\left\{\begin{array}{rcl} x-15 &=& -13 \\ y+16 &=& 16 \\ z+8 &=& 9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2 \\ y &=& 0 \\ z &=& 1 \end{array}\right.$$

Donc E(2 ; 0 ; 1)

5. F et E appartiennent à la droite $\mathscr{D}$ perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$, donc la distance du point F au plan est égale à FE.

Or $\text{FE}^2 = (-13)^2+16^2+9^2 = 169+256+81 = 506$. D'où $\text{FE} = \sqrt{506}$.

6. Comme précédemment si $M \in \mathscr{D}$ perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ la distance de ce point au plan $\mathscr{P}$ est ME.



- Premier point répondant à la question : M_1 tel que $\overrightarrow{\text{E}M_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}}$.

De $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}$, on déduit que $\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}} = \overrightarrow{\text{E}M_1}\begin{pmatrix} 6,5 \\ -8 \\ -4,5 \end{pmatrix}$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1-2 &=& 6,5 \\ y_1-0 &=& -8 \\ z-1 &=& -4,5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& 8,5 \\ y_1 &=& -8 \\ z &=& -3,5 \end{array}\right.$$

- Deuxième point répondant à la question : M_2 tel que $\overrightarrow{EM_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

De $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$, on déduit que $-\frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EM_2}\begin{pmatrix}-6,5\\8\\4,5\end{pmatrix}$, soit

$$\left\{\begin{array}{lcl}x_2-2 & = & -6,5\\ y_2-0 & = & 8\\ z_2-1 & = & 4,5\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}x_2 & = & -4,5\\ y_2 & = & 8\\ z_2 & = & 5,5\end{array}\right.$$

Donc $M_1(8,5\,;\,-8\,;\,-3,5)$ et $M_2(-4,5\,;\,8\,;\,5,5)$.

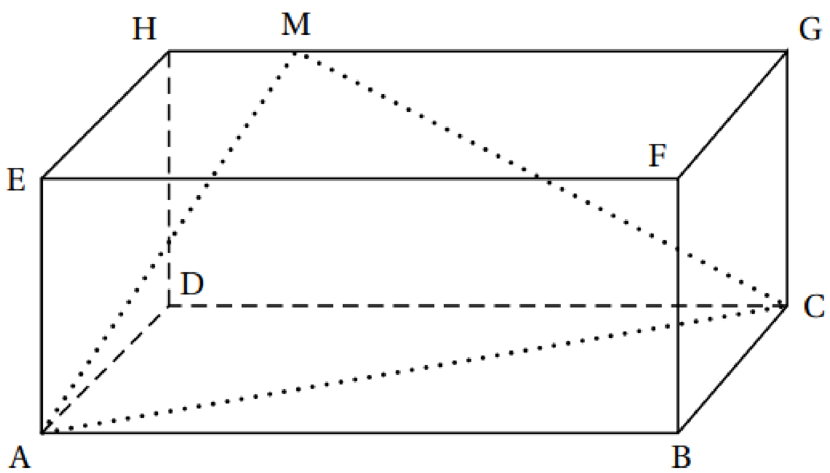
Exercice V

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que

AB = 5, AD = 3 et AE = 2.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées (5; 0; 0), (0; 3; 0) et (0; 0; 2).

Le repère est donc : $\left(A\,;\frac{1}{5}\overrightarrow{AB},\ \frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point H a pour coordonnées (0 ;3 ;2).
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point G a pour coordonnées (5 ;3 ;2).

b. La droite (GH) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{HG}$ de coordonnées $(5\,;0\,;0)$.

De plus, elle passe par le point G donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5+5t \\ y &=& 3 \\ z &=& 2 \end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

a. $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_M-0 &=& 5k \\ y_M-3 &=& 0 \\ z_M-2 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_M &=& 5k \\ y_M &=& 3 \\ z_M &=& 2 \end{array}\right.$

Donc les coordonnées de M sont $(5k\,;\,3\,;\,2)$.

b. Les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont celles de M donc : $(5k\,;\,3\,;\,2)$.

Les coordonnées de C sont $(5\,;3\,;0)$, donc celles de $\overrightarrow{CM}$ sont $(5k-5\,;3-3\,;2-0)$ soit $(5k-5\,;0\,;2)$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM} = 5k\times(5k-5)+3\times 0+2\times 2 = 25k^2-25k+4$

c. Le triangle AMC est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CM}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}$ ou encore $25k^2-25k+4=0$.

On résout cette équation. $\Delta = (-25)^2-4\times 25\times 4 = 225 = 15^2$

L'équation admet deux solutions $k' = \dfrac{25+15}{2\times 25} = \dfrac{40}{50} = \dfrac{4}{5}$ et $k'' = \dfrac{25-15}{2\times 25} = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$

Donc pour $k=\dfrac{1}{5}$ ou $k=\dfrac{4}{5}$, le triangle AMC est rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1\,;3\,;2)$.

On admet que le triangle AMC est rectangle en M.

3. On considère le point K de coordonnées $(1\,;3\,;0)$.

a. Le plan (ACD) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, donc il a pour équation cartésienne $z=0$.

b. $z_K=0$ donc le point K appartient au plan (ACD).

$\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $(0\,;0\,;-2)$, donc

- $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ donc $\overrightarrow{MK}\perp\overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc $\overrightarrow{MK}\perp\overrightarrow{AC}$.

On en déduit que $\overrightarrow{MK}$ est orthogonal au plan (ACD), et donc que K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).

c. Le volume du tétraèdre MACD est : $\dfrac{1}{3}\times$ Aire de ACD $\times$ MK.

$\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $(0\,;0\,;-2)$, donc $\text{MK}=2$.

Le triangle ACD est rectangle en D donc a pour aire $\dfrac{\text{AD}\times\text{DC}}{2} = \dfrac{3\times 5}{2} = \dfrac{15}{2}$.

Le volume du tétraèdre MACD est donc, en unités de volume : $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{15}{2}\times 2 = 5$.

4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).

Si on considère D comme sommet du tétraèdre MACD, la base est le triangle AMC, et la hauteur est DP.

Le triangle AMC est rectangle en M donc son aire est : $\dfrac{\text{AM} \times \text{MC}}{2}$.

$\text{AM} = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{14}$

$\text{CM} = \sqrt{(1-5)^2 + (3-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20}$

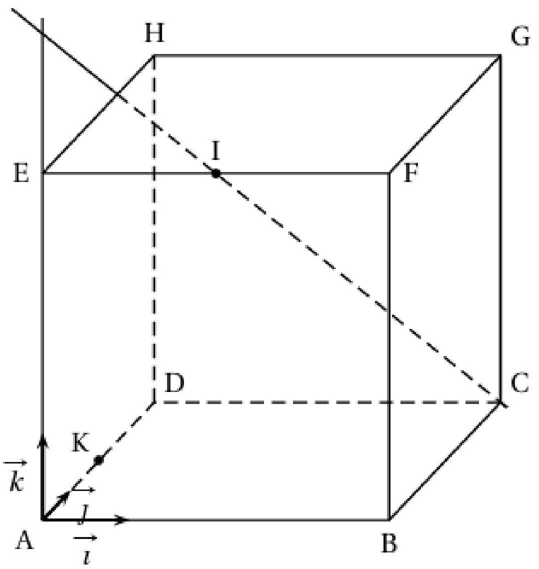
L'aire de AMC vaut : $\dfrac{\sqrt{14} \times \sqrt{20}}{2} = \sqrt{70}$.

Le tétraèdre MACD a donc pour volume : $\dfrac{1}{3} \times \sqrt{70} \times \text{DP}$ soit : $\dfrac{\text{DP}\sqrt{70}}{3}$.

On sait que ce volume vaut 5, donc : $\dfrac{\text{DP}\sqrt{70}}{3} = 5$ donc : $\text{DP} = \dfrac{15}{\sqrt{70}} \approx 1,8$.

Exercice VI

On considère un repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\, \vec{\imath}\,,\, \vec{\jmath}\,,\, \vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel on place les points B(4 ; 0 ; 0), D(0 ; 4 ; 0), E(0 ; 0 ; 4), et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. De $\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} = 4\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath}$, on déduit que C(4 ; 4 ; 0) ;

De $\overrightarrow{\text{AF}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AE}} = 4\,\vec{\imath} + 4\,\vec{k}$, on déduit que F(4 ; 0 ; 4) ;

De $\overrightarrow{\text{AG}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}} = 4\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} + 4\,\vec{k}$, on déduit que G(4 ; 4 ; 4) ;

De $\overrightarrow{\text{AH}} = \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}} = 4\,\vec{\jmath} + 4\,\vec{k}$, on déduit que H(0 ; 4 ; 4).

2. Le point I, milieu de [EF], a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+4}{2}\ ;\ \dfrac{0+0}{2}\ ;\ \dfrac{4+4}{2}\right) = (2\ ;\ 0\ ;\ 4)$.

On sait que $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{IC}) \iff \overrightarrow{\text{I}M} = t\overrightarrow{\text{IC}}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Avec $\overrightarrow{\text{IC}}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$, on a donc :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{IC}) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-2 &=& 2t\\ y-0 &=& 4t\\ z-4 &=& -4t,\end{array}\right. \text{avec } t \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+2t\\ y &=& 4t\\ z &=& 4-4t\end{array}\right. \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de $\mathscr{P}$ avec (lC).

a. Le vecteur $\overrightarrow{\text{IC}}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. On sait qu'alors :

$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{P} \iff 2x+4y-4z+d=0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\text{G}(4; 4; 4) \in \mathscr{P} \iff 2\times4+4\times4-4\times4+d=0 \iff d=-8$.

On a donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{P} \iff 2x+4y-4z-8=0 \iff x+2y-2z-4=0$.

b. J étant commun à (IC) et $\mathscr{P}$, ses coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient les équations paramétriques de (IC) et l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$, soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+2t\\ y &=& 4t\\ z &=& 4-4t\\ x+2y-2z-4 &=& 0\end{array}\right.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$2+2t+2\times4t-2\times(4-4t)-4=0 \iff 2+2t+8t-8+8t-4=0$
$\iff 18t-10=0 \iff 9t-5=0 \iff t=\dfrac{5}{9}$.

En utilisant la représentation paramétrique de (IC), on obtient :

$x=2+2\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{18+10}{9}=\dfrac{28}{9}$; $y=4\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{20}{9}$ et $z=4-4\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{36-20}{9}=\dfrac{16}{9}$.

Donc C est la perpendiculaire (IC) au plan $\mathscr{P}$ qui coupe ce plan en J : J est donc le projeté orthogonal de C sur le plan, $\mathscr{P}$.

c. $\text{K}(0\ ;\ 2\ ;\ 0) \in \mathscr{P} \iff 0+2\times2-2\times0-4=0$: cette égalité est vraie

d. On vient de voir que K est un point de $\mathscr{P}$ et K est un point du plan de la base (ABCD) du cube.

D'autre part $\text{B}(4\ ;\ 0\ ;\ 0) \in \mathscr{P} \iff 4+2\times0-2\times0-4=0$, qui est vraie donc B est un point de $\mathscr{P}$ et bien sur de (ABC).

Conclusion : les deux points B et K sont communs aux deux plans, donc l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC) est la droite (BK).

4. **a.** On prend comme base le triangle CBG de la face de droite BCGF : son aire est la moitié de celle du carré de côté 4, soit $\dfrac{4^2}{2} = 8$.

La hauteur de la pyramide est alors [DC] avec DC = 4.

On a donc : $V_{\text{CBKG}} = \dfrac{8 \times 4}{3} = \dfrac{32}{3}$.

b. En prenant pour la même pyramide la base BKG, la hauteur est [CJ].

Comme $\overrightarrow{\text{CJ}}\begin{pmatrix} 4 - \frac{28}{9} \\ 4 - \frac{20}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix}$, d'où :

$\text{CJ}^2 = \|\overrightarrow{\text{CJ}}\|^2 = \left(\dfrac{8}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{16}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{16}{9}\right)^2 = \dfrac{64 + 256 + 256}{81} = \dfrac{576}{81} = \dfrac{9 \times 64}{9 \times 9} = \dfrac{64}{9} = \left(\dfrac{8}{3}\right)^2$.

Donc $\text{CJ} = \dfrac{8}{3}$.

Le volume de la pyramide est égal à :

$$\dfrac{32}{3} = \dfrac{\text{aire(BKG)} \times \frac{8}{3}}{3} \iff \text{aire(BKG)} = 32 \times \dfrac{3}{8} = 4 \times 3 = 12.$$

c. On a déjà vu que B est un point de $\mathscr{P}$ et G aussi par définition, donc la droite (BG) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

d. On note I′ un point de l'arête [EF], et $\mathscr{P}'$ le plan orthogonal à la droite (I′C) passant par G.

Le point I′ a pour coordonnées $(x\,;\, y\,;\, z)$ telles que $\overrightarrow{\text{EI}'} = k\overrightarrow{\text{EF}}$ avec $k \in [0\,;\, 1]$.

Donc $\begin{cases} x - 0 &= (4-0)k \\ y - 0 &= (0-0)k \\ z - 4 &= (4-4)k \end{cases}$ et donc $\text{I}'\begin{pmatrix} 4k \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; on a donc $\overrightarrow{\text{I}'\text{C}}\begin{pmatrix} 4-4k \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{BG}}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{I}'\text{C}} \cdot \overrightarrow{\text{BG}} = (4-4k) \times 0 + 4 \times 4 + (-4) \times 4 = 0$ donc $\overrightarrow{\text{I}'\text{C}} \perp \overrightarrow{\text{BG}}$.

G appartient au plan $\mathscr{P}'$ qui est le plan orthogonal à (I′C) ; comme $\overrightarrow{\text{I}'\text{C}} \perp \overrightarrow{\text{BG}}$, on peut dire que B appartient aussi à $\mathscr{P}'$. Donc la droite (BG) est incluse dans $\mathscr{P}'$.

Exercice VII (facultatif)

1. **a.** $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $7 \times \dfrac{2}{7} = 2$ et $-4 \times \dfrac{2}{7} \neq 3$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont pas alignés donc ils définissent bien un plan dont $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont deux vecteurs directeurs.

b. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{n} \,.\, \overrightarrow{\text{AB}} = 5 \times 7 + 16 \times (-4) + 29 \times 1 = 35 - 64 + 29 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{AB}}$.
$\overrightarrow{n} \,.\, \overrightarrow{\text{AC}} = 5 \times 2 + 16 \times 3 + 29 \times (-2) = 10 + 48 - 58 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{AC}}$.
Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

Si M a pour coordonnées $(x\,;\, y\,;\, z)$, alors $\overrightarrow{\text{AM}}$ a pour coordonnées $(x+1\,;\, y+1\,;\, z)$.
$\overrightarrow{\text{AM}} \perp \overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{\text{AM}} \,.\, \overrightarrow{n} = 0 \iff 5(x+1) + 16(y+1) + 29z = 0 \iff 5x + 16y + 29z + 21 = 0$
Le plan (ABC) a pour équation $5x + 16y + 29z + 21 = 0$.

On exprime que H appartient au plan (ABC), ce qui va permettre de déterminer la valeur de k :

$$\begin{aligned} 5x_{\text{H}}+16y_{\text{H}}+29z_{\text{H}}+21=0 &\iff 5(13+5k)+16(37+16k)+29(54+29k)+21=0\\ &\iff 65+25k+592+256k+1\,566+841k+21=0\\ &\iff 2244+1\,122k=0 \iff k=-2\end{aligned}$$

Donc le point H a pour coordonnées : $\left\{\begin{array}{lllll} x_{\text{H}} &=& 13+5(-2) &=& 3\\ y_{\text{H}} &=& 37+16(-2) &=& 5\\ z_{\text{H}} &=& 54+29(-2) &=& -4\end{array}\right.$

4. Le volume du tétraèdre SABC est $\dfrac{\text{aire(ABC)}\times \text{SH}}{3}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{SH}}$ a pour coordonnées $(5k\ ;\ 16k\ ;\ 29k)$ donc $(5(-2)\ ;\ 16(-2)\ ;\ 29(-2))=(-10\ ;\ -32\ ;\ -58)$. Donc $\text{SH}^2=(-10)^2+(-32)^2+(-58)^2=4\,488$ et donc $\text{SH}=\sqrt{4\,488}=2\sqrt{1\,122}$.

$\text{aire(ABC)}=\dfrac{\sqrt{1122}}{2}$ donc le volume du tétraèdre est $\dfrac{\dfrac{\sqrt{1122}}{2}\times 2\sqrt{1\,122}}{3}=\dfrac{1\,122}{3}=374$ unités de volume.