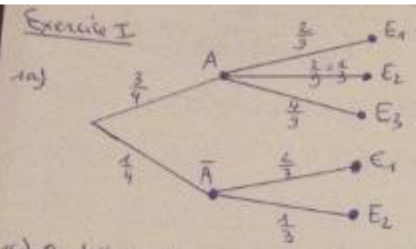
Exercice I

1a)



$P(A) = \frac{900}{1200} = \frac{3}{4}$

1b) $\boxed{P(\bar{A} \cap E_2)} = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(E_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{12}}$

La probabilité que la personne interrogée prenne l'escalier (ET) aille au 2e étage est égale à $\frac{1}{12}$.

1c) On doit montrer que : $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3)$ $(= \frac{1}{3}\ !)$

Or $P(E_1) = \underbrace{P(A \cap E_1)} + P(\bar{A} \cap E_1)$ d'après la formule des probabilités totales.

$P(E_1) = P(A) \times P_A(E_1) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(E_1)$

$P(E_1) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

$\boxed{P(E_1)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

De même, $P(E_2) = \underbrace{P(A \cap E_2)} + \underbrace{P(\bar{A} \cap E_2)}$

$\boxed{P(E_2)} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$

Comme (E_1, E_2, E_3) forment une partition de l'univers des possibles, on a : $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$

donc $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + P(E_3) = 1$, donc $P(E_3) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Par suite, $\boxed{P(E_1) = P(E_2) = P(E_3), \text{ donc } E_1, E_2 \text{ et } E_3 \text{ sont équiprobables}}$

1d) On cherche ici : $P_{E_2}(\bar{A})$: D'après la relation des probabilités conditionnelles on a :

$\boxed{P_{E_2}(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A} \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(E_2)}{P(E_2)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{1}{4}}$

2) Interroger une personne et lui demander si elle va au 2ème étage ou non constitue une épreuve de Bernoulli (le succès est ici : aller au 2ème étage). Le paramètre p de cette dernière est $p = \frac{1}{3}$ d'après 1c).

On répète 60 fois cette même épreuve, de façon indépendante.

La variable aléatoire X égale au nombre de personnes allant au 2ème étage parmi les 60 interrogés suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(60\,;\,\frac{1}{3})$: $\boxed{X \sim \mathcal{B}(60\,;\,\frac{1}{3})}$

b) On cherche ici : $P(X=15) = \binom{60}{15} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{15} \times \left(1-\frac{1}{3}\right)^{60-15} = \binom{60}{15} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{15} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{45}$.

On tape : BinomFdp$(60, 1/3, 15)$

donc $\boxed{P(X=15) \approx 0{,}0446 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}}$

c) On cherche ici $E(X) = n \times p = 60 \times \frac{1}{3} = 20$.

En moyenne, on peut s'attendre à 20 personnes (sur les 60 interrogés) allant au $2^{\text{ème}}$ étage.

d) On cherche ici : $P(X \geq 6)$

Or $P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - P(X \leq 5)$ car X est à valeurs entières.

$P(X \geq 6) = 1 -$ BinomFrep$(60, \frac{1}{3}, 5)$

$\boxed{P(X \geq 20) \simeq 0{,}440 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

Exercice II (45 page 442)

Lorsqu'on tire une cordelette, la probabilité p de gagner est : $p = \frac{30}{250} = 0,12$

a) Tirer une cordelette constitue une épreuve de Bernoulli : soit on gagne le gros lot (succès) avec une probabilité $p = 0,12$, soit on perd !

on répète trois fois cette même épreuve de Bernoulli, de façon indépendante, donc on a un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X égale au $\overbrace{\text{nombre de gros lots gagnés}}^{=\text{nombre de succès}}$ par le joueur au cours de ce schéma de Bernoulli suit donc la loi binomiale de paramètres : $n = 3$ et $p = 0,12$.

$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(3; 0,12)}$

b) on cherche ici la valeur de $P(X=0)$.

On rappelle que si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$, alors, pour tout entier k tel que : $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ici, $k=0$; $n=3$; $p=0,12$.

donc $P(X=0) = \binom{3}{0} \times 0,12^0 \times (1-0,12)^{3-0} = 1 \times 1 \times 0,88^3 = 0,88^3$

$\boxed{P(X=0) \approx 0,68 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$

c) on cherche ici la valeur de $P(X \geq 1)$.

Or, $P(X\geq 1) = 1 - P(\overline{X \geq 1}) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0)$ car X est à valeurs entières !

$P(X \geq 1) \simeq 1 - 0,68$

$\boxed{P(X\geq 1) \simeq 0,32 \text{ au centième près.}}$

d) on cherche ici la valeur de $P(X=2)$:

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \times 0,12^2 \times (1-0,12)^{3-1} = \binom{3}{2} \times 0,12^2 \times 0,88$$

on peut taper directement sur la T.I : $P(X=2) = \text{BinomFdp}(3, 0.12, 2)$

$\boxed{P(X=2) \simeq 0,04 \text{ au centième près}}$

Exercice II (70 page 450)

Notons R l'évènement : l'avion est en retard et T : le retard est de plus de 3^h.

$P(R) = 0{,}04$; $P_R(T) = 0{,}22$

d'après la formule des probabilités conditionnelles : $\overbrace{P(T)}^{P(R\cap T)} = P(R) \times P_R(T) = 0{,}04 \times 0{,}22 = 0{,}0088.$

Effectuer un vol courte distance constitue une épreuve de Bernoulli : soit le vol a un retard de plus de 3^h (Succès) soit il a moins de 3^h de retard.

Alexandra répète 20 fois (① 10 allers retours) de façon indépendante cette même épreuve de Bernoulli.

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de retards de plus de 3^h lors de ces 20 voyages.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0{,}0088)$

$750^€ = 250^€ \times 3$, donc on cherche ici la valeur de $P(X=3)$:

$P(X=3) = \binom{20}{3} \times 0{,}0088^3 \times (1-0{,}0088)^{20-3}$ et on tape sur T.I : BinomFdp(20, 0.0088, 3)

$\boxed{P(X=3) \simeq 6{,}7 \times 10^{-4}}$

Exercice IV

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(30\,;0{,}9)$

a) $P(X=27) =$ binomFdp$(30, 0.9, 27)$

$P(X=27) \approx 0{,}2361$ à 10^{-4} près.

b) $P(X \leqslant 25) =$ binomFrep$(30, 0.9, 25)$.

$P(X \leqslant 25) \approx 0{,}1755$ à 10^{-4} près.

c) $P(X \geqslant 27) = 1 - P(X < 27) = 1 - P(X \leqslant 26)$ car X est à valeurs entières.

et $\overline{(X \geqslant 27)}$ est l'événement : $X < 27$.

$P(X \geqslant 27) = 1 -$ binomFrep$(30, 0.9, 26)$

$P(X \geqslant 27) \approx 0{,}6474$ à 10^{-4} près

d) $P(21 \leqslant X \leqslant 27) = P(X \leqslant 27) - P(X \leqslant 20) =$ binomFrep$(30, 0.9, 27) -$ binomFrep$(30, 0.9, 20)$

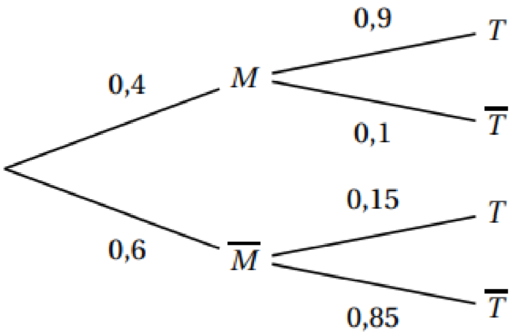
$P(21 \leqslant X \leqslant 27) \approx 0{,}5882$ à 10^{-4} près.

e) Grâce à une table de valeurs : $Y =$ binomFrep$(30, 0.9, X)$

b	$P(X \leqslant b)$
28	0,8163
29	0,9576

On trouve sans peine $b = 29$

Exercice V



b. Il faut trouver $P(M\cap T) = P(M)\times P_M(T) = 0,4\times 0,9 = 0,36$.

c. On a de même $P\left(\overline{M}\cap T\right) = P\left(\overline{M}\right)\times P_{\overline{M}}(T) = 0,6\times 0,15 = 0,09$.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M\cap T)+P\left(\overline{M}\cap T\right) = 0,36+0,09 = 0,45$.

d. Il faut trouver $P_T(M) = \dfrac{P(M\cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,36}{0,45} = \dfrac{36}{45} = \dfrac{9\times 4}{9\times 5} = \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{10} = 0,8$.

2. **a.** On suppose que le nombre de chats est assez important pour que l'on puisse assimiler le choix des 20 chats à un tirage avec remise.

La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et de probabilité $p = 0,45$ trouvé à la question **1. c.**.

b. On a $p(X=5) = \binom{20}{5}\times 0,45^5\times(1-0,45)^{20-5} = 15504\times 0,45^5\times 0,55^{15}\approx 0,0365$ soit environ 0,037.

c. La calculatrice donne $P(X<9)\approx 0,414$.

d. On sait que l'espérance $E = n\times p = 20\times 0,45 = 9$.

Cela signifie que sur un grand nombre d'échantillons il y aura en moyenne 9 chats positifs par échantillon de 20.

3. **a.** On a encore une loi binomiale de paramètres n et de probabilité d'être positif de $0,45$.

On a $P(X=0) = \binom{n}{0}\times 0,45^0\times 0,55^n = 0,55^n$.

Donc $p_n = 1-P(X=0) = 1-0,55^n$.

b. En partant de $n=0$, le programme calcule p_n et augmente la taille de l'échantillon de 1 tant que $p_n < 0,99$.

On cherche donc n tel que $1-0,55^n \geqslant 0,99 \iff 0,01\geqslant 0,55^n$, *grâce à une table de valeurs de la calculatrice par exemple, on trouve sans peine que n = 8.*

Exercice VI

Exercice IV

1a) $P(B)\neq 0$, donc $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Or $\{A\,;\,\bar A\}$ partitionne Ω, donc $B=(A\cap B)\cup(\bar A\cap B)$ (union disjointe c'est-à-dire $A\cap B$ et $\bar A\cap B$ incompatibles).

$$P(B)=\underbrace{P(A\cap B)}+\underbrace{P(\bar A\cap B)}$$

$$P(B)=P(A)\times P_A(B)+P(\bar A)\times P_{\bar A}(B)$$ (Ici l'énoncé aurait dû préciser que $P(\bar A)\neq 0$).

D'où : $$\boxed{P_B(A)=\dfrac{P(A)\times P_A(B)}{P(A)\times P_A(B)+P(\bar A)\times P_{\bar A}(B)}}$$ (relation de Bayes).

1b) Nommons A = "la personne est atteinte de la maladie"

B = " le test est positif".

on a : $P(A)=x$ et on cherche $P_B(A)$. Grâce à la question précédente, en tenant compte du fait que $P_A(B)=\dfrac{99}{100}=0{,}99$ et $P_{\bar A}(B)=\dfrac{0{,}1}{100}=0{,}001$ on a : $f(x)=\dfrac{x\times 0{,}99}{x\times 0{,}99+\underbrace{(1-x)}\times 0{,}001}$

$P(\bar A)=1-P(A)=1-x$

d'où : $f(x)=\dfrac{0{,}99x}{0{,}99x+0{,}001-0{,}001x}=\dfrac{0{,}99x}{0{,}989x+0{,}001}$

$$\boxed{f(x)}=\frac{0{,}99x\times 1000}{(0{,}989x+0{,}001)\times 1000}=\boxed{\frac{990x}{989x+1}}$$

2a) $0\leq x\leq 1$ et $f(x)=\dfrac{990x}{989x+1}$: f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec : $\begin{cases}u(x)=990x\\ u'(x)=990\end{cases}$

f est dérivable sur $[0;1]$

$\begin{cases}v(x)=989x+1\\ v'(x)=989\end{cases}$

Donc $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

d'où $\forall x\in[0;1]$, $f'(x)=\dfrac{990(989x+1)-990x\times 989}{(989x+1)^2}$

$$\boxed{f'(x)}=\frac{\cancel{990\times 989x}+990-\cancel{990\times 989x}}{(989x+1)^2}=\boxed{\frac{990}{(989x+1)^2}}.$$

Or $990>0$ et $(989x+1)^2>0$ (pour tout réel x).

Donc, $\forall x\in[0;1]$, $f'(x)>0$, donc f est strictement croissante sur $[0;1]$.

2b) Ici $x=\dfrac{1}{10.000}=10^{-4}$. Donc $f(x)=f(10^{-4})=\dfrac{990\times 10^{-4}}{980\times 10^{-4}+1}$

$f(10^{-4})\approx 0{,}09$ (soit environ 9 %).

On peut légitimement penser que ce test n'est pas efficace et ne doit pas être commercialisé.

2c) On cherche $x \in [0;1]$ tel que $f(x) \geq 0,99$

$$f(x) \geq 0,99 \iff \frac{990x}{989x+1} \geq 0,99 \iff \frac{990x}{989x+1} \geq \frac{99}{100} \underset{\div 99 \text{ et } 99>0}{\iff} \frac{10x}{989x+1} \geq \frac{1}{100}$$

$$f(x) \geq 0,99 \underset{\times 100 \text{ avec } 100>0}{\iff} \frac{1000x}{989x+1} \geq 1 \underset{\substack{\text{car} \\ 989x+1>0 \text{ vu que } 0\leq x\leq 1}}{\iff} 1000x \geq 989x+1 \iff 11x \geq 1 \underset{\text{car } 11>0}{\iff} x \geq \frac{1}{11}$$

Il faudrait donc au minimum $\frac{1}{11}$ de personnes malades dans la population pour que la valeur prédictive du test soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice VII

On peut (doit?) ici faire un arbre pour obtenir p(E_2) !!!

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

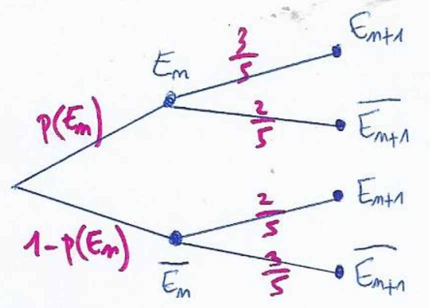
a. On a $p(E_1) = \frac{2}{5}$, $p_{E_1}(E_2) = \frac{3}{5}$ et $p_{\overline{E_1}}(E_2) = \frac{2}{5}$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée à E_1 et à $\overline{E_1}$:

$p(E_2) = p(E_1 \cap E_2) + p\left(E_1 \cap \overline{E_2}\right) = p(E_1) \times p_{E_1}(E_2) + p\left(\overline{E_1}\right) \times p_{\overline{E_1}}(E_2) =$

$\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \left(1 - \frac{2}{5}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25} = 0,48.$

b)



Si E_n est réalisé, alors on ajoute une bille verte dans E_{n+1} qui contient alors 3 billes vertes et 2 jaunes donc $P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{3}{5}$.

Même principe si $\overline{E_n}$ est réalisé : E_{n+1} contient alors 2 billes vertes et 3 jaunes donc $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{2}{5}$.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(E_{n+1}) = P(E_n \cap E_{n+1}) + P(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$

$P(E_{n+1}) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\overline{E_n}) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$

$$P(E_{n+1}) = P(E_n) \times \frac{3}{5} + (1 - P(E_n)) \times \frac{2}{5}$$

$$P(E_{n+1}) = \frac{3}{5} P(E_n) + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} P(E_n) = \frac{1}{5} P(E_n) + \frac{2}{5}$$

Attention, l'auteur du corrigé rédige très vite la récurrence ci-dessous et ne définit pas la propriété P(n) qui est ici :

$u_n \leq \frac{1}{2}$:

2. Étude d'une suite

a. Démonstration par récurrence :

— *Initialisation* : $u_1 = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$: vrai ; la relation est vraie au rang 1.

— *Hérédité* : soit un naturel $n \geqslant 1$ et supposons que $u_n < \frac{1}{2}$; alors $\frac{1}{5}u_n < \frac{1}{10} \iff \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} < \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \iff u_{n+1} < \frac{5}{10}$. Soit finalement $u_{n+1} < \frac{1}{2}$. La relation est vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang et si elle est vraie au rang $n \geqslant 1$, elle est vraie au rang $n+1$. On a démontré par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \frac{1}{2}$.

b. Pour tout naturel $n > 0$,

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} - u_n = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}u_n = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$.

D'après la question précédente $u_n \leqslant \frac{1}{2}$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

La suite (u_n) est croissante

c. La suite est croissante et majorée par 1 : elle converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 1$.

ℓ vérifie la relation de récurrence : $\ell = \frac{1}{5}\ell + \frac{2}{5} \iff 5\ell = \ell + 2 \iff 4\ell = 2 \iff \ell = \frac{1}{2}$.

3. a. On a de façon évidente $u_n = p(E_n)$ et par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} p(E_n) = \frac{1}{2}$.

A très long terme, la probabilité de piocher une bille verte se stabilise à $\frac{1}{2}$