Terminale Maths Groupe 2 **Corrigé du DS7** **Janvier 2023**

Exercice I

Partie A $x \geq 0$ et $g(x) = x^2 e^x - 1$

a) Par limites de référence : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc par limite de produit

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^x = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1) = -1$, donc par limite de somme : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

b) $g(x) = x^2 e^x - 1 = u(x)v(x) - 1$ où : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$.

g est dérivable sur $[0;+\infty[$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

$\boxed{g'(x)} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - 0 = 2xe^x + x^2e^x = \boxed{xe^x(x+2)}$.

Étudions le signe de $g'(x)$ sur $[0;+\infty[$: $e^x > 0$; et $x \geq 0$, donc $x + 2 \geq 2 > 0$.

Par suite (règle des signes d'un produit), $g'(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$.

donc g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et on a :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	-1 ↗	$+\infty$

$g(0) = 0 - 1 = -1$.

c) *) g est continue sur $[0;+\infty[$ car dérivable sur $[0;+\infty[$.

**) g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

***) $0 \in [-1;+\infty[$, donc 0 est valeur intermédiaire pour g sur l'intervalle étudié.

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$: il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que : $g(\alpha) = 0$.

d) A l'aide de la calculatrice et par balayages successifs, on a :

Pas égal à 0,1 :

x	$g(x)$
0,7	−0,013
α	0
0,8	0,4243

$0{,}7 < \alpha < 0{,}8$ (encadrement à 0,1 près de α)

Pas égal à 0,01 :

x	$g(x)$
0,7	−0,013
α	0
0,71	0,0253

$\boxed{0{,}7 < \alpha < 0{,}71}$: encadrement à 10^{-2} près de α.

Par suite, $\boxed{\alpha \approx 0{,}7}$: valeur approchée de α au dixième près.

e) Complétons le tableau de la question b) :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$

Par suite : g croît sur $[0;\alpha]$ et $g(\alpha)=0$, donc : $\forall x\in[0;\alpha]$, $g(x)\leqslant 0$.

De même $\forall x\in[\alpha;+\infty[$, $g(x)\geqslant 0$.

D'où le signe de g sur $[0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

$x>0$ et $f(x)=e^x+\frac{1}{x}$.

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}=+\infty$, donc par limite de somme : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, donc par limite de somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

b) Pour $x>0$: $\boxed{f'(x)}=e^x-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2e^x-1}{x^2}=\boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$

c) D'après e) partie $\boxed{A}$ on a le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$, et comme $x>0$, $x^2>0$, donc $f'(x)$ a même signe que $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

donc :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$e^\alpha+\frac{1}{\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\alpha)=e^\alpha+\frac{1}{\alpha}$

d) D'après le tableau précédent, f décroît sur $]0;\alpha]$ et croît sur $[\alpha;+\infty[$, donc f admet un minimum sur $]0;+\infty[$ atteint lorsque $x=\alpha$.

Ce minimum est $m=f(\alpha)=e^\alpha+\frac{1}{\alpha}$.

Or par définition de α, $g(\alpha)=0\iff \alpha^2e^\alpha-1=0\iff\alpha^2e^\alpha=1\overset{\alpha\neq 0}{\iff} e^\alpha=\frac{1}{\alpha^2}$

Par suite, $\boxed{m=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}}$.

Exercice II

1a)

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige (d) (lecture de R-P).

1b) Etudions la colinéarité des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\2\\-9\end{pmatrix}$ qui dirigent respectivement les droites d et d' :

<u>$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires</u>, car toutes les coordonnées de $\vec{u}$ étant égales à 1, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étaient colinéaires, alors les coordonnées de $\vec{v}$ seraient toutes égales ($\vec{v} = k\vec{u}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ impliquerait $\vec{v}\begin{pmatrix}k\\k\\k\end{pmatrix}$!).

Par suite, $\boxed{d \text{ et } d' \text{ ne sont pas parallèles}}$.

1c) d' passe par $B(4;4;-6)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\2\\-9\end{pmatrix}$, donc une représentation paramétrique de d' est : $\boxed{\begin{cases} x = 4+5t' \\ y = 4+2t' \quad \text{où } t' \in \mathbb{R} \\ z = -6-9t' \end{cases}}$.

1d) Vu que d et d' ne sont ni parallèles ni confondues, étudions à l'aide de leurs R-P l'intersection de d et d' :

$$M(x;y;z) \in d \cap d' \iff \exists (t;t') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } \begin{cases} x = 4+5t' = -1+t \\ y = 4+2t' = 2-t \\ z = -6-9t' = 3+t \end{cases}$$

Ainsi, on cherche s'il existe des réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} t-1 = 4+5t' \\ 2-t = 4+2t' \\ 3+t = -6-9t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5+5t' \\ 2-(5+5t') = 4+2t' \\ 3+5+5t' = -6-9t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5+5t' \\ -3-5t' = 4+2t' \\ 8+5t' = -6-9t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 5+5t' \\ 7t' = -7 \\ 14t' = -14 \end{cases} \iff \begin{cases} t' = -\frac{7}{7} = -1 \\ t' = -\frac{14}{14} = -1 \\ t = 5+5\times(-1) = 0 \end{cases}$$ (<u>système compatible</u>). et donc : $\begin{cases} x = 0-1 = -1 \\ y = 2-0 = 2 \\ z = 3+0 = 3 \end{cases}$

$\mathcal{S} = \{(0;-1)\}$: $M(-1;2;3)$ est le point d'intersection des droites d et d' qui sont donc <u>sécantes en M</u>.

2)

$\vec{w}\begin{pmatrix}26\\26\\26\end{pmatrix}$ dirige (Δ), donc $\vec{w} = 26\vec{u}$: (d) et (Δ) sont parallèles ou confondues.

de plus, si $t=0$, $A(-1;2;3) \in (d)$ et on cherche s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} -1 = 9+26k \\ 2 = 2-26k \\ 3 = 13+26k \end{cases}$

Ce qui équivaut à : $\left\{\begin{array}{l} k = \frac{-1-9}{26} = -\frac{10}{26} = -\frac{5}{13} \\ k = 0 \end{array}\right\}$ système incompatible!

Donc d et Δ sont strictement parallèles.

Exercice III

1 $\boxed{C}$ (AC) et (SB) non coplanaires.

2 $D(0;-1;0)$ $S(0;0;1)$, donc K = Milieu de [SD] a pour coordonnées : $K(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

$C(1;0;0)$ donc L = Milieu de [SC] a pour coordonnées : $L(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2})$.

Enfin, N = Milieu de [KL] a pour coordonnées : $N(\frac{1}{4};-\frac{1}{4};\frac{1}{2})$ Réponse $\boxed{B}$

3 $A(-1;0;0)$ et $S(0;0;1)$, donc $\vec{AS}\begin{pmatrix}0-(-1)=1\\0-0=0\\1-0=1\end{pmatrix}$ Réponse $\boxed{B}$

4 (AS) est dirigée par $\vec{AS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et passe par $S(0;0;1)$ donc $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (AS) : Réponse $\boxed{C}$

5 Réponse $\boxed{B}$: $N(-3;-4;6)$ qui est le point de Δ de paramètre $t=-2$

6 $\vec{OD} = 3\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC}$ équivaut à (Chasles) : $\vec{OA} + \vec{AD} = 3\vec{OA} - (\vec{OA} + \vec{AB}) - (\vec{OA} + \vec{AC})$

$\vec{OA} + \vec{AD} = 3\vec{OA} - \vec{OA} - \vec{AB} - \vec{OA} - \vec{AC}$

$\cancel{\vec{OA}} + \vec{AD} = \cancel{\vec{OA}} - \vec{AB} - \vec{AC}$

alors $\boxed{\vec{AD} = -\vec{AB} - \vec{AC}}$

Comme A, B, C non alignés puisque $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ non colinéaires $\left(\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}\right)$, $\vec{AD}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, donc $\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC}$ sont COPLANAIRES : Réponse $\boxed{A}$.

7) Réponse $\boxed{C}$: Les points A, B, D définissent un unique plan (facile car non alignés……).