**Terminale Maths Groupe 2** **Corrigé du DS6** **Décembre 2022**

**Exercice I**

**Partie A**

**1) Réponse c).**

**2) Réponse c).**

Partie B

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $-1 \times e^{-x} \leqslant \sin(x) e^{-x} \leqslant 1 \times e^{-x}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$

$$-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$.

et $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

2) Pour $x \geqslant 0$, $g(x) = (x+1)e^{-2x}$

a) $\boxed{g(x)} = x e^{-2x} + e^{-2x} = \boxed{-0{,}5 \times (-2x e^{-2x}) + e^{-2x}}$ $\quad (-0{,}5 \times (-2) = 1)$.

b) $\boxed{\lim\limits_{X \to -\infty} X e^{X} = 0}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} X e^{X} = 0$, donc par limite de fonctions composées, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x e^{-2x}) = 0$

donc par limite de produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-0{,}5 \times (-2x e^{-2x})) = 0$

Enfin, $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$, donc par composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$

par limite de somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ signifie que la droite d'équation $y = 0$ (à savoir l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe représentative de $g$ en $+\infty$.

**Exercice II**

***Attention à la rédaction trop sommaire de ce corrigé.***

1. On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{0}{1} = 0$.
   On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $-\infty$.

2. $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1} = \frac{2e^x \times e^{-x}}{(e^x+1) \times e^{-x}} = \frac{2}{1+e^{-x}}$

   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2$.
   Ceci montre que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   $f'(x) = \frac{2e^x(e^x+1) - e^x \times 2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{e^x+1} \times \frac{1}{e^x+1} = \frac{f(x)}{e^x+1}$.

4. Pour tout $x$, $e^x > 0$ donc, comme $f(x)$ est le quotient de deux réels supérieurs à zéro, $f(x) > 0$ ; $f'(x) > 0$ comme quotient de deux nombres positifs : la fonction $f$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de 0 à 2.

5. On a $f(0) = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$, donc $I(0\,;\,1) \in \mathscr{C}$.

   La tangente à $\mathscr{C}$ au point I a pour coefficient directeur $f'(0) = \frac{f(0)}{e^0+1} = \frac{1}{2}$.

*Remarque : la rédaction sur la recherche des limites de ce corrigé est trop elliptique.*

*A la question 1, il faudrait ajouter par limite de somme, de produit et de quotient.*

*A la question 2) dire que* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ *et citer les opérations sur les limites ici utilisées.*

**Exercice III**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé.

1. **a.** D'après le cours, la limite de la fonction $f$ en $+\infty$ est $+\infty$.

   **b.** On cherche la limite de $f$ en 0 :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$$

   Donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x\times x-\mathrm{e}^x\times 1}{x^2}=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$.

3. Pour déterminer les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on cherche le signe de $f'(x)$.

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $\mathrm{e}^x$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x^2$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | |

$f(1)=\dfrac{\mathrm{e}^1}{1}=\mathrm{e}$

On établit le tableau de variations de la fonction $f$ :

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $\mathrm{e}$ | ↗ | $+\infty$ |

**4.** Soit $m$ un nombre réel. On cherche, en fonction des valeurs du nombre réel $m$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
Cela revient à chercher le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite horizontale d'équation $y = m$.
D'après le tableau de variations :

- si $m < \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution ;
- si $m = \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique $x = 1$ ;
- si $m > \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

**5.** On note $\Delta$ la droite d'équation $y = -x$.
On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a$ en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite $\Delta$.

**a.** La tangente en $a$ est parallèle à la droite $\Delta$ si et seulement si le coefficient directeur de la tangente est égal à $-1$, autrement dit quand $f'(a) = -1$.

$$f'(a) = -1 \iff \frac{\mathrm{e}^a(a-1)}{a^2} = -1 \iff \mathrm{e}^a(x-1) = -a^2 \iff \mathrm{e}^a(x-1) + a^2 = 0$$

ce qui veut dire que le nombre $a$ est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.

On note $g$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.
On admet que la fonction $g$ est dérivable et on note $g'$ sa fonction dérivée.

**b.** $g'(x) = \mathrm{e}^x \times (x-1) + \mathrm{e}^x \times 1 + 2x = x\mathrm{e}^x + 2x$

Sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$, $x\mathrm{e}^x + 2x \geqslant 0$ donc $g'(x) \geqslant 0$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$g(0) = \mathrm{e}^0(0-1) + 0 = -1$

On dresse le tableau de variations de la fonction $g$ sur $[0\,;\,+\infty[$ :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**c.** On complète le tableau de variations de $g$ :

| $x$ | $0$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

D'après ce tableau, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $a$ sur $[0\,;\,+\infty[$, donc il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite $\Delta$.

***Exercice IV***

Partie A $\quad f(x) = x^2 + e^{2x}$.

a) On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et que $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc par composition et somme de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

de même, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$, et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc par composition et somme de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

b) Pour tout réel $x$, $f(x) = x^2 + e^{2x}$.

donc $f'(x) = 2x + 2e^{2x}$ $\qquad$ rappel : $(e^{ax})' = ae^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$ (ici $a = 2$).

et $\quad f''(x) = 2 + 2\times 2e^{2x} = 2 + 4e^{2x}$

$$\boxed{f''(x) = 2(1 + 2e^{2x})}.$$

c) Vu que $\begin{cases} 2>0 \\ 1>0 \end{cases}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$, on a : $f''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de Lagrange, $f'$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) $f'(x) = 2x + 2e^{2x}$.

on a déjà vu que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$, par somme et produit de limites on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty}$.

de même, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$, donc par somme et produit de limites on a :

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty}$.

e) Grâce à d) et c) on a donc :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ |

•) $f'$ est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable !
•) $f'$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
•) $0 \in ]-\infty ; +\infty[$

donc d'après le corollaire du T.V.I, l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
On la note $\alpha$ : on a donc $f'(\alpha) = 0$.

f) Par la méthode de balayage on a :

Avec un pas de 1 :

| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $-1$ | $-1{,}73$ |
| $0$ | $2$ |

donc $-1 < \alpha < 0$
(au unité près)

Avec un pas de 0,1

| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $-0{,}5$ | $-0{,}264$ |
| $-0{,}4$ | $0{,}0986$ |

donc $-0{,}5 < \alpha < -0{,}4$
(au dixième près)

Avec un pas de 0,01

| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $-0{,}43$ | $-0{,}013$ |
| $-0{,}42$ | $0{,}0234$ |

donc $\boxed{-0{,}43 < \alpha < -0{,}42}$
(au centième près).

g) On a :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f'$ croît sur $]-\infty;\alpha]$ et $f'(\alpha)=0$
Donc, $\forall x\in ]-\infty;\alpha]$, $f'(x)\leq 0$.

De même, $\forall x \in [\alpha;+\infty[$, $f'(x)\geq 0$.

Donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f(\alpha)=\alpha^2+e^{2\alpha}$

h) $f$ décroît sur $]-\infty;\alpha]$ et croît sur $[\alpha;+\infty[$, donc $f$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque $x=\alpha$.

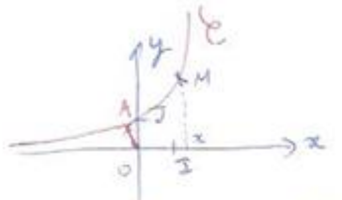
Ce minimum vaut $f(\alpha)=\alpha^2+e^{2\alpha}$.

Or, par définition de $\alpha$, on sait que $f'(\alpha)=0 \iff 2\alpha+2e^{2\alpha}=0 \iff e^{2\alpha}=-\alpha$

Par suite, $f(\alpha)=\alpha^2-\alpha=\alpha(\alpha-1)$.

Partie B.

1)




Soit $M(x;e^x)\in\mathcal{C}$ avec $x\in\mathbb{R}$.
$O(0;0)$.

Vu qu'on est dans R.O.N, $OM=\sqrt{(e^x-0)^2+(x-0)^2}=\sqrt{(e^x)^2+x^2}$

$OM=\sqrt{e^{2x}+x^2}$ car $(e^x)^n=e^{nx}$.

$OM=\sqrt{f(x)}$ où $f$ est la fonction de la partie $\boxed{A}$ !!

---

On sait que $u$ et $\sqrt{u}$ ont la même monotonie ($u$ à valeurs positives).

Donc grâce à $\boxed{A}$ partie h, la distance $OM$ est minimale lorsque $x=\alpha$.

C'est donc $\boxed{A(\alpha;e^\alpha) \text{ point de } \mathcal{C} \text{ le plus proche de l'origine } O !}$

$OA=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{\alpha(\alpha-1)}$, $OA\approx 0{,}8$ au dixième près.

Si vous ne saviez pas qu'une fonction positive et sa racine carrée ont même sens de variation, on peut aussi passer par les dérivées :

g(x) = $\sqrt{f(x)}$ donc g'(x) = $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ car f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Donc par positivité de la racine carrée, g'(x) a le même signe que f'(x) et ce dernier a été étudié à la question g) : g est donc décroissante sur $]-\infty; \alpha[$ et croissante sur $]a; +\infty[$, donc g admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque x = $\propto$ .