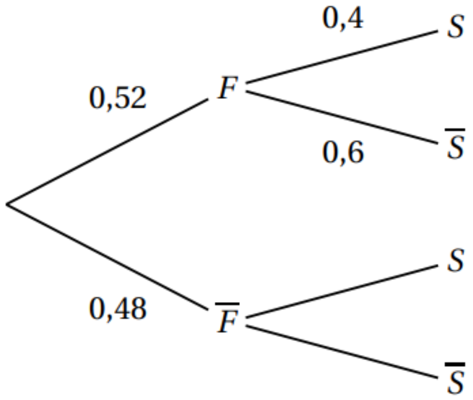
**Terminale Maths Groupe 2** **Corrigé du DS5** **Novembre 2022**

**Exercice I**

**1.** **a.** L'énoncé nous indique que ce stage a été suivi par 25 % des salariés. Donc $p(S) = 0,25$.

**b.** L'arbre complété avec les valeurs disponibles :




**c.** On calcule $p(F \cap S)$ : $p(F \cap S) = p_S(F) \times p(S) = 0,4 \times 0,52 = 0,208$

**d.** On cherche calculer $p_S(F)$. D'après la formule de Bayes,

$$p_S(F) = \frac{p(F \cap S)}{p(S)} = \frac{0,208}{0,25} = 0,832$$

**e.** Appliquons la formule des probabilités totales : $p(S) = p(S \cap F) + p(S \cap \overline{F})$.

Donc $p\left(S \cap \overline{F}\right) = p(S) - p(S \cap F) = 0,25 - 0,208 = 0,042$.

Avec la formule de Bayes : $p_{\overline{F}}(S) = \dfrac{p\left(S \cap \overline{F}\right)}{p\left(\overline{F}\right)} = \dfrac{0,042}{0,48} = 0,00875 < 0,1$.

L'affirmation du directeur est donc exacte.

**2.** **a.** Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. $X$ est la variable aléatoire qui compte les succès. $X$ suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$ : $X \sim \mathscr{B}(20; 0,25)$

**b.** $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,25^5 \times (1 - 0,25)^{20-5} \approx 0,202$.

La probabilité qu'exactement 5 salariés suivent le stage est d'environ 0,202.

**c.** « proba(5) » calcule pour $k$ allant de 0 à 5, la somme des probabilités $p(X = k)$,

Soit $p(X \leqslant 5)$. À la calculatrice, $p(X \leqslant 5) \approx 0,617$.

Cela signifie que la probabilité qu'au plus 5 salariés aient effectué le stage, est égale à 0,617.

La probabilité qu'au moins 6 salariés suivent le stage est d'environ 0,617.

**d.** $p(X \geqslant 6) = 1 - p(X < 6) = 1 - p(X \leqslant 5) \approx 1 - 0,617 \approx 0,383$

e) $P(X \geq 1)$ est ici cherchée.

Or, $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0)$ car $X$ à valeurs entières.

donc $P(X \geq 1) = 1 - \binom{20}{0} \times 0{,}25^{0} \times (1-0{,}25)^{20-0} = 1 - 0{,}75^{20}$

$\boxed{P(X \geq 1) \approx 0{,}997 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

f) On cherche ici la valeur de : $P(1 \leq X \leq 19)$.

Or $P(1 \leq X \leq 19) = \underbrace{P(0 \leq X \leq 20)} - \left(\underbrace{P(X=0)} + \underbrace{P(X=20)}\right)$

$P(1 \leq X \leq 19) = 1 - \left( \binom{20}{0} \times 0{,}75^{20} + \underbrace{\binom{20}{1}}_{20} \times 0{,}25^{1} \times 0{,}75^{19} \right)$

$P(1 \leq X \leq 19) = 1 - 0{,}75^{20} - 5 \times 0{,}75^{19}$

$\boxed{P(1 \leq X \leq 19) \approx 0{,}976 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

g) $X$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0{,}25)$, donc $E(X) = np = 20 \times 0{,}25 = \boxed{5}$

En moyenne, il y a 5 employés qui ont suivi le stage ~~dans~~ un échantillon de 20 employés de l'entreprise interrogés.

**Exercice II**

**Partie A**

1. Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

| | $A$ | $\overline{A}$ | Total |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0,05 | 0,15 | 0,2 |
| $\overline{B}$ | 0,05 | 0,75 | 0,8 |
| Total | 0,1 | 0,9 | 1 |

2. **a.** La probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2 est l'évènement contraire de l'évènement « une paire de verres ne présente aucun des deux défauts », donc sa probabilité est égale $1 - 0{,}75 = 0{,}25$. Ou encore $P(A \cup B) = 1 - \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

   **b.** • On a $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$;

   • On a $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

   Donc $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}8 - 0{,}75 = 0{,}05$ et

   $P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0{,}9 - 0{,}75 = 0{,}15$.

Donc la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts est égale à :

$P(A\cap B) = 1 - P\left(A\cap\overline{B}\right) - P\left(B\cap\overline{A}\right) - P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = 1-0,05-0,15-0,75 = 0,05.$

**c.** $P(A)\times P(B) = 0,1\times 0,2 = 0,02$ et $P(A\cap B) = 0,05$.

On a donc $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$ : les évènements $A$ et $B$ ne sont pas indépendants.

**3.** On a $P\left(A\cap\overline{B}\right) + P\left(B\cap\overline{A}\right) = 0,05+0,15 = 0,2$

**4.** On a $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,05}{0,1} = \dfrac{1}{2}$.

**Partie B**

**1.** La production est suffisamment importante pour que la probabilité d'avoir le déf ut $T1$ est égale à 0,1. Comme il y a 50 tirages indépendants, la variable aléatoire $X$ suit une moi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$.

**2.** On sait que $P(X=10) = \binom{50}{10}\times 0,1^{10}\times(1-0,1)^{50)10}$.

La calculatrice donne $P(X=10)\approx 0,015$ au millième près.

**3.** La moyenne est l'espérance de la variable $X$ et on sait que $E(X) = n\times p = 50\times 0,1 = 5$.

**4.**

Soit $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de pair de verres qui présente un défaut !

$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n ; 0,1).}$

On cherche le plus petit entier $n$ tel que : $P(Y\geq 1) > 0,99$.

Or $P(Y\geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{n}{0}\times 0,1^0\times 0,9^n = 1-0,9^n$.

$P(Y\geq 1) > 0,99 \iff 1-0,9^n > 0,99$

Avec la table de valeurs de votre machine, on trouve sans peine : $\boxed{n\geq 44}$

Il faut donc prélever au minimum 44 pairs de verres pour qu'il en soit ainsi.