Exercice I

1. Diminuer de 10 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,9$.
On multiplie donc l'effectif de l'année n, u_n par 0,9 puis on augmente cet effectif de 100 : on a donc

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

2. • $u_0 = 2000$,d'où $u_1 = 0,9 \times 2000 + 100 = 1800 + 100 = 1900$;
• $u_1 = 1900$,d'où $u_2 = 0,9 \times 1900 + 100 = 1710 + 100 = 1810$.

3. *Initialisation* : $1000 < 1900 \leqslant 2000$, soit $1000 < u_1 \leqslant u_0$: l'encadrement est vrai au rang $n = 0$.
Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.
En multipliant chaque membre par 0,9, on obtient : $0,9 \times 1000 < 0,9 \times u_{n+1} \leqslant 0,9 \times u_n$
puis en ajoutant 100 à chaque membre on obtient :
$900 + 100 < 0,9u_{n+1} + 100 \leqslant 0,9u_n + 100$, soit :
$1000 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n + 1$.
L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, il l'est encore au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n : $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

4. La récurrence précédente montre que :

— la suite (u_n) est décroissante $(u_{n+1} \leqslant u_n)$;

— la suite (u_n) est minorée par 1 000

La suite (u_n) converge.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1000$.

a. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$, soit $v_{n+1} = 0,9u_n + 100 - 1000$, ou encore $v_{n+1} = 0,9u_n - 900 = 0,9(u_n - 1000)$ et enfin :

$$v_{n+1} = 0,9v_n.$$

Cette égalité vraie pour tout naturel n montre que la suite (v_n) rdt une suite géométrique de raison 0,9.

b. On a donc $v_0 = u_0 - u_0 - 1000 = 2000 - 1000 = 1000$.
On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$ (avec $q = 0,9$), soit $v_n = 1000 \times 0,9^n$.
Or $v_n = u_n - 1000 \iff u_n = v_n + 1000$, soit $u_n = 1000 \times 0,9^n + 1000 = 1000(1 + 0,9^n)$.

c. Comme $0 < 0,9 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + 0,9^n = 1$ et par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1000.$$

Cela signifie qu'au bout de nombreuses années la population va se rapprocher de 1 000 individus.

Exercice II

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{7}{4}$.

Pour n = 1, u_2 = $u_{1+1} = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}$.

2) La suite (u_n) semble être croissante.

3. a. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

- **Initialisation**
  Pour $n=0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité**
  On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ (hypothèse de récurrence).

$$\begin{aligned} n \leqslant u_n \leqslant n+1 &\iff \frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) \\ &\iff \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n \\ &\iff n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant n + \frac{3}{4} \\ &\iff n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant n + \frac{3}{4} + 1 \iff n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

  donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.
  On a démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. D'après la question précédente :

- Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ donc $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ d'où on tire $u_n \leqslant u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, $n \leqslant u_n$; or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c. Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$ c'est-à-dire : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Pour tout n, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}(v_n + n) - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n$$

$v_0 = u_0 - 0 = 1$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

b. On en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.