Terminale Maths G1 — Corrigé du DS2 — Octobre 2021

Exercice I

a) $f(x) = \sqrt{x^2+e^x} = \sqrt{u(x)}$ où $\begin{cases} u(x) = x^2+e^x \\ u'(x) = 2x+e^x. \end{cases}$ (u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ et $e^x > 0$ donc $x^2+e^x > 0$).

$\boxed{f'(x)} = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \boxed{\dfrac{2x+e^x}{2\sqrt{x^2+e^x}}}$

b) $g(x) = -2x^3+5x+9$

$g'(x) = -2\times 3x^2+5$

$\boxed{g'(x) = -6x^2+5}$

$h(x) = (-2x^3+5x+9)^5 = (g(x))^5$

donc $h'(x) = 5g'(x)(g(x))^4$

$\boxed{h'(x) = 5(-6x^2+5)(-2x^3+5x+9)^4}$

c) $i(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = e^{-2x} \\ u'(x) = -2e^{-2x} \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = x \\ v'(x) = 1. \end{cases}$

$i'(x) = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{-2e^{-2x}\times x - e^{-2x}\times 1}{x^2} = \dfrac{e^{-2x}(-2x-1)}{x^2} = \boxed{\dfrac{-e^{-2x}(2x+1)}{x^2}}$

d) $j(x) = x+e^{3x}$

$\boxed{j'(x) = 1+3e^{3x}}$

⚠ $e^{3x} = e^{u(x)}$ où $\begin{cases} u(x) = 3x. \\ u'(x) = 3 \end{cases}$

donc comme $(e^u)' = u'e^u$

on a la dérivée de $x \mapsto e^{3x}$ est $x \mapsto 3e^{3x}$

e) $k(x) = \dfrac{1}{1+e^{-4x}} = \dfrac{1}{v(x)}$ où $\begin{cases} v(x) = 1+e^{-4x} \\ v'(x) = 0+(-4)e^{-4x} = -4e^{-4x}. \end{cases}$

$k'(x) = \dfrac{-v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{4e^{-4x}}{(1+e^{-4x})^2}$

Exercice II

1. Réponse (b) : sur $[0;+\infty[$ (Calculer $g''(x) = 6x$ puis résoudre $g''(x) \geq 0$).
2. Réponse (b) (!) Il faut dériver 2 fois un produit !!
3. Réponse (b) : 1.
4. Réponse (d) : $\dfrac{1}{e}$

Exercice III

1) $f(0) = 3$ et $f'(0)$ = coefficient directeur de $(T) = -\dfrac{2}{1} = \boxed{-2}$ (méthode de l'escalier).

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + ax + be^{-x}$

donc $\boxed{f(0)} = e^0 + a\times 0 + be^{-0} = \boxed{1+b}$ car $e^0 = 1$.

or (Q.1), $f(0) = 3$, donc $1+b = 3$, donc $\boxed{b} = 3-1 = \boxed{2}$

On a par suite : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x} + ax + 2e^{-x}$.

③ a) $f'(x) = e^{x} + a + 2\times(-1)\times e^{-x} = e^{x} + a - 2e^{-x}$

b) $f'(0) = e^{0} + a - 2e^{0} = 1 + a - 2 = a - 1$.

Or d'après q.1, $f'(0) = -2$, donc : $a - 1 = -2$, donc $a = -2 + 1 = -1$.

Par suite : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = e^{x} - x + 2e^{-x}}$

Exercice IV

a) Manifestement, f est concave sur $[-1;1]$ car $\mathcal{C}_f$ semble être située AU-DESSOUS de chacune de ses tangentes sur cet intervalle.

f semble être convexe sur $[1;3]$ car $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes sur $[1;3]$.

b) On sait que lorsque f est 2 fois dérivable sur un intervalle I, et si f est convexe sur I, alors $\forall x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$ et que f est concave sur I ~~ssi~~ $\forall x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

Grâce à la question a) et à ce résultat rappelé, on a :

$\forall x \in [-1;1]$, $f''(x) \leqslant 0$ et $\forall x \in [1;3]$, $f''(x) \geqslant 0$. (et donc $\mathcal{C}_{f''}$ au dessus de l'axe des abscisses sur $[1;3]$ et $\mathcal{C}_{f''}$ au dessous de l'axe des abscisses sur $[-1;1]$.)

Par lecture graphique des 3 courbes données, seule la 3ème respecte cela.

Exercice V

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2+x+1}$

f est de type : $f = e^u$ où $\begin{cases} u(x) = -x^2+x+1 \\ u'(x) = -2x+1 \end{cases}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

donc $f' = u'e^u$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x+1}$

OR, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2+x+1} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $-2x+1$.

Ainsi, $f'(x) \geqslant 0 \iff -2x+1 \geqslant 0 \iff 1 \geqslant 2x \iff x \leqslant \frac{1}{2}$

D'où :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$e^{\frac{5}{4}}$	$\searrow$	

$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1} = e^{\frac{5}{4}}$

2) $\mathcal{C}_f$ admet autant de tangentes horizontales que l'équation $f'(x) = 0$ a de solution dans $\mathbb{R}$.
Grâce à la question 1), $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$: $\mathcal{C}_f$ admet une unique tangente parallèle à l'axe des abscisses.

3) Notons T_A la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(0\,;f(0))$ avec $f(0) = e^1 = e$

T_A a pour équation réduite : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ avec $f'(0) = (-2\times 0+1)e^1 = e$.

$$\boxed{y = ex + e}$$

Exercice VI

① Grâce à la courbe de $\mathcal{C}_{f'}$ on lit graphiquement le signe des valeurs prises par f' sur $[0;5]$.

x	0		1		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Le principe de Lagrange permet de conclure concernant le sens de variation de f sur $[0;5]$:

f croît sur $[0;1]$ et décroît sur $[1;5]$.

② f est convexe sur $[2;5]$ car $f''(x) \geq 0$ sur $[2;5]$.

③ Grâce à $\mathcal{C}_{f''}$, f'' s'annule et change de signe une seule fois sur $[0;5]$ en l'abscisse 2 : donc $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion ayant pour abscisse 1.

Exercice VII

$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n+4}$

① $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante : $u_n > 0$.

Initialisation : Pour $n=0$, $u_0 = 1$ et $1 > 0$, donc $u_0 > 0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. Supposons que pour cet entier là $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, c'est à dire supposons que : $u_n > 0$ (Hypothèse de récurrence).

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire prouvons que $u_{n+1} > 0$.

Or, d'après l'énoncé, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n+4}$, et par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$.

Donc comme $4 > 0$, $4u_n > 0$ et $u_n + 4 > 0$, donc $\dfrac{4u_n}{u_n+4} > 0$ (règle des signes), donc

$u_{n+1} > 0$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion

$\mathcal{P}(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence on a :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$.

② Vu que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ (q.①) on peut ici légitimement utiliser la méthode des quotients :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{4u_n}{u_n+4}}{u_n} = \dfrac{4\cancel{u_n}}{(u_n+4)\times\cancel{u_n}} = \dfrac{4}{u_n+4}$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, donc $u_n + 4 > 4$ donc $\dfrac{1}{u_n+4} < \dfrac{1}{4}$ (décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$)

Donc $\dfrac{4}{u_n+4} < 4 \times \dfrac{1}{4}$ car $4 > 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$: la suite (u_n) est strictement décroissante.