Exercice I

1a) $y' = 10y$ est de la forme : $y' = ay$ avec $a = 10$.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{10x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ke^{10x} \end{array}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

1b) g est solution de $y' = 10y$ sur $\mathbb{R}$, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ke^{10x}$.

De plus, $g(2) = 3 \iff ke^{10 \times 2} = 3 \iff k = \frac{3}{e^{20}} = 3e^{-20}$.

Donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R}}$, $\boxed{g(x)} = 3e^{-20} \times e^{10x} = \boxed{3e^{10x-20}}$

2) $x > 1$ et $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ f est dérivable (quotient) sur $]1;+\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Par suite, $\underline{\text{pour } x > 1}$: $(x-1)f'(x) + f(x) = (x-1) \times \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} + \dfrac{x^2}{x-1}$

$$(x-1)f'(x) + f(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)} + \frac{x^2}{x-1} = \frac{2x^2-2x}{x-1} = \frac{2x(x-1)}{x-1}$$

Donc : $\underline{(x-1)f'(x) + f(x) = 2x}$: f est bien solution sur $]1;+\infty[$ de l'E.D. : $(x-1)y' + y = 2x$.

Exercice II

(E) : $y'' - 4y' = 1$

$Z = y'$, donc $Z' = (y')' = y''$

1) $\boxed{(E) : y'' - 4y' = 1 \text{ équivaut donc à : } Z' - 4Z = 1 \quad (E')}$.

Résolvons (E') sur $\mathbb{R}$: $z' - 4z = 1$ équivaut à : $z' = 4z + 1$ qui est de la forme : ③

$z' = az + b$

avec : $a = 4$; $b = 1$.

D'après le cours, les solutions de $z' = 4z$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $z(x) = ke^{4x}$.

De plus, la fonction constante égale à $-\frac{1}{4}$ est trivialement solution de (E') (car $0 = 4z + 1 \ldots$)

D'après le cours, les solutions de (E') sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$z(x) = ke^{4x} - \frac{1}{4} \text{ où } k \in \mathbb{R}. \qquad \mathcal{S}_{(E')} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ke^{4x} - \frac{1}{4}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

② On connaît les solutions de (E') et $z = y'$.

Par suite, $y'(x) = ke^{4x} - \frac{1}{4}$, avec $x \in \mathbb{R}$. $k \in \mathbb{R}$.

Donc $y(x) = k\frac{e^{4x}}{4} - \frac{1}{4}x + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \mu e^{4x} - \frac{1}{4}x + \lambda \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mu e^{4x} - \frac{1}{4}x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.}$$