Terminale Maths Groupe 2 | Corrigé du DS11 | Mars 2023

Exercice I

Question 1 : Réponse $\boxed{B}$: $F(x) = (-x-1)e^{-x}$.

En effet, $F = uv$ où $\begin{cases} u(x) = -x-1 \\ u'(x) = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^{-x} \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$.

$F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

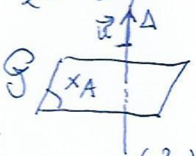
$F'(x) = -e^{-x} + (-x-1)\times(-e^{-x}) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = e^{-x}(-1+x+1) = xe^{-x} = f(x)$

Question 2 : Réponse $\boxed{D}$: $G(x) = x^3\ln(x) + 2$ $\left(G(1) = 2 \text{ et } G'(x) = 3x^2\ln(x) + x^3 \times \frac{1}{x} \right.$
$\left. G'(x) = 3x^2\ln(x) + x^2 \right)$

Question 3 : Réponse $\boxed{B}$: H est convexe sur $[0;3]$ (car $H' = h$ et h croît sur $[0;3]$).

Question 4 : Réponse $\boxed{B}$: $F(x) = \frac{e^x}{x}$ $\left(\text{car } F'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2} \right)$.

Exercice II



Par lecture de la représentation paramétrique donnée de Δ, $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dirige Δ.

Comme Δ est orthogonale au plan cherché (que l'on nommera $\mathcal{P}$), on a que $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme : $2x + 1y + (-1)z + d = 0$
$2x + y - z + d = 0$.

Or, $A(0;1;2) \in \mathcal{P} \iff 2x_A + y_A - z_A + d = 0 \iff 2\times 0 + 1 - 2 + d = 0$
$\iff d = 2 - 1 = 1$.

donc une équation de $\mathcal{P}$ est : $\boxed{2x + y - z + 1 = 0}$

Exercice III

$f(x) = x - e^{-2x}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$

Donc par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-2x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, donc par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

de même, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et par composition.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

donc par limite de produit et somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

---

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$).

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = x - e^{-2x}$, donc $f'(x) = 1-(-2)e^{-2x} = 1+2e^{-2x}$.

Or, $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-2x}>0$, $2>0$, $1>0$ donc $1+2e^{-2x}>0$, donc $f'(x)>0$ sur $\mathbb{R}$:

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) *) f est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$.

**) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'après q.②.

***) $0\in]-\infty;+\infty[$.

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Bla-Bla-Bla.... Avec une machine, en encadrant à 10^{-3} près, on obtient : $\alpha \approx 0{,}43$ à 10^{-2} près.

4)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

(d'après q.2 et q.3).