Exercice I

Dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points

$$A(-3 ; 1 ; 3), B(2 ; 2 ; 3), C(1 ; 7 ; -1), D(-4 ; 6 ; -1) \text{ et } K(-3 ; 14 ; 14).$$

1. **a.** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\5\\-4\end{pmatrix}$.

b. D'après la question précédente, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.
De plus le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5 \times (-1) + 1 \times 5 + 0 \times (-4) = 0$.
Le parallélogramme ABCD ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires est un rectangle.

c. On a $AB^2 = 25 + 1 = 26$, d'où $AB = \sqrt{26}$;
de même $AD^2 = 1 + 25 + 16 = 42$, d'où $AD = \sqrt{42}$.
L'aire du rectangle ABCD est égale à
$AB \times AD = \sqrt{26} \times \sqrt{42} = \sqrt{26 \times 42} = \sqrt{2 \times 13 \times 2 \times 21} = 2\sqrt{13 \times 21} = 2\sqrt{273}$.

2. **a.** D'après la question 1., les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et D ne sont pas alignés : ils définissent donc bien un plan.

b. Soit le vecteur $\vec{n}(-2 ; 10 ; 13)$.
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -10 + 10 + 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 + 50 - 52 = 0$.
Conclusion : le vecteur $\vec{n}$, orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD), est normal à ce plan.

c. Le résultat précédent montre que le plan (ABD) a une équation de la forme $-2x + 10y + 13z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$.
Or par exemple $B(2 ; 2 ; 3) \in (ABD)$ donc
$-2 \times 2 + 10 \times 2 + 13 \times 3 = d \iff -4 + 20 + 39 = d \iff d = 55$.
Donc le plan (ABD) a pour équation $-2x + 10y + 13z = 55$.

3. **a.** Si Δ est orthogonale au plan (ABD) elle a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$.
Comme elle contient K, on a donc :
$M(x, y ; z) \in \Delta \iff \overrightarrow{KM} = t\vec{n}, \quad t \in \mathbb{R}$.

Avec $\overrightarrow{\mathrm{K}M}\begin{pmatrix} x-(-3) \\ y-14 \\ z-14 \end{pmatrix}$ ceci se traduit par le système :

$$\begin{cases} x+3 &= -2t \\ y-14 &= 10t \\ z-14 &= 13t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= -2t-3 \\ y &= 10t+14 \\ z &= 13t+14 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

b. Si I est le projeté orthogonal de K sur le plan (ABD), le point I est un point de Δ ; comme c'est aussi un point de (ABD) ; ses coordonnées vérifient le système

$$\begin{cases} x &= -2t-3 \\ y &= 10t+14 \\ z &= 13t+14 \\ -2x+10y+13z &= 55 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant dans la dernière équation x, y et z par leurs expressions en fonction de t, on obtient :

$-2(-2t-3)+10(10t+14)+13(13t+14) = 55$

$\iff 4t+6+100t+140+169t+182 = 55 \iff 273t = -273 \iff t = -1.$

Les premières équations donnent alors

$x = 2-3 = -1,\quad y = -10+14 = 4$ et $z = -13+14 = 1.$

Le point I a donc pour coordonnées $(-1\,;\,4\,;\,1)$.

c. ABCD étant un rectangle le point D appartient au plan (ABD). Donc la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD est [KI].

$\overrightarrow{\mathrm{KI}}\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix}$ donne $\mathrm{KI}^2 = 4+100+169 = 273$ et enfin $\mathrm{KI} = \sqrt{273}$.

4. On a $V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}(\mathrm{ABCD}) \times \mathrm{KI} = \dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{273} \times \sqrt{273} = \dfrac{2 \times 273}{3} = \dfrac{2 \times 3 \times 91}{3} = 182.$

Exercice II

Partie A

a) $\overrightarrow{UV}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{UV} = \|\overrightarrow{UV}\| = \sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{12} = \boxed{2\sqrt{3}}$ u.l.

$\overrightarrow{UW}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{UW} = \|\overrightarrow{UW}\| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \boxed{\sqrt{11}}$ u.l.

b) $\boxed{\overrightarrow{UV}.\overrightarrow{UW}} = xx'+yy'+zz' = -2\times(-3)+2\times(-1)+(-2)\times(-1) = 6-2-2 = \boxed{2}$.

Or $\underbrace{\overrightarrow{UV}.\overrightarrow{UW}}_{} = \|\overrightarrow{UV}\| \times \|\overrightarrow{UW}\| \times \cos(\widehat{VUW})$

donc : $2 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{11} \times \cos(\widehat{VUW})$, donc $\boxed{\cos(\widehat{VUW})} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}\times\sqrt{11}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{33}}}$

Donc $\boxed{\widehat{VUW} \simeq 80^\circ}$ à $0{,}1^\circ$ près.

c) $\vec{\gamma}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan Q d'équation $-x+y+2z+1=0$.

Montrons que $\vec{\gamma}$ est normal aux vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{UW}$ (qui forment une base du plan (UVW)) :

$\vec{\gamma}.\overrightarrow{UV} = -1\times(-2)+1\times 2+2\times(-2) = 2+2-4 = 4-4 = 0$, donc $\boxed{\vec{\gamma} \perp \overrightarrow{UV}}$.

$\vec{\gamma}.\overrightarrow{UW} = -2\times(-3)+2\times(-1)+(-2)\times(-1) = 6-2-4 = 6-6 = 0$, donc $\boxed{\vec{\gamma} \perp \overrightarrow{UW}}$.

Par suite $\vec{\gamma}$ qui est normal à Q est aussi normal au plan (UVW), donc <u>Q et (UVW) sont parallèles</u>.

Partie B

- la droite $\mathscr{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3+t \\ z = 3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1. **a.** La droite $\mathscr{D}'$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

c. La droite $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y;z)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires, c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t.\overrightarrow{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$, soit : $\begin{cases} x-2 = t \\ y-4 = 2t \\ z-0 = 0t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

La droite $\mathscr{D}$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 4+2t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$, et M$'$ le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}'$.
On se propose de déterminer la distance MM$'$ appelée « distance entre les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ».

2. Soit le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 1 \times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$.
- $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u'} = 2 \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u'}$.

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est donc orthogonal aux deux vecteurs directeurs de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, donc c'est un vecteur directeur de leur perpendiculaire commune Δ.

3. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant les droites $\mathscr{D}$ et Δ, c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

a. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 2 \times 1 + (-1) \times 2 + (-5) \times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u}$.
- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 2 \times 2 + (-1) \times (-1) + (-5) \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v}$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}$, donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b. Le plan $\mathscr{P}$ est le plan ayant $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal et passant par A, donc c'est l'ensemble des points $\mathrm{P}(x;y;z)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{n}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{n} \iff (x-2)\times 2+(y-4)\times(-1)+z\times(-5)=0$$
$$\iff 2x-4-y+4-5z=0 \iff 2x-y-5z=0$$

Donc une équation du plan $\mathscr{P}$ est : $2x-y-5z=0$.

c. On rappelle que M' est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}'$.
Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite Δ et M' est un point de la droite Δ ; donc M' est un point du plan $\mathscr{P}$. M' appartient à $\mathscr{D}'$ et à $\mathscr{P}$ donc M' est le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.

Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de M' vérifient donc le système $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3 \\ y &=& 3+t \\ z &=& 3+t \\ 2x-y-5z &=& 0 \end{array}\right.$

$2x-y-5z=0$ devient $2\times 3-(3+t)-5(3+t)=0$ soit $6-3-t-15-5t=0$ ou encore $-12=6t$ ce qui donne $t=-2$.

$x=3$; $y=3+t=3-2=1$ et $z=3+t=1$

Les coordonnées du point M' sont donc $(3\,;\,1\,;\,1)$.

4. **a.** La droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et passe par le point M', donc elle a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+2t' \\ y &=& 1-t' \\ z &=& 1+t' \end{array}\right. \quad t'\in\mathbb{R}$.

b. Le point M est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de Δ donc ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t \\ y &=& 4+2t \\ z &=& 0 \\ x &=& 3+2t' \\ y &=& 1-t' \\ z &=& 1+t' \end{array}\right.$

On a donc $\left\{\begin{array}{rcl} 2+t &=& 3+2t' \\ 4+2t &=& 1-t' \\ 0 &=& 1+t' \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{rcl} t &=& -1 \\ -1 &=& t' \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t \\ y &=& 4+2t \\ z &=& 0 \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1 \\ y &=& 2 \\ z &=& 0 \end{array}\right.$

Donc le point M a pour coordonnées $(1\,;\,2\,;\,0)$.

c. $\mathrm{MM}'=\sqrt{(x_{\mathrm{M}'}-x_{\mathrm{M}})^2+(y_{\mathrm{M}'}-y_{\mathrm{M}})^2+(z_{\mathrm{M}'}-z_{\mathrm{M}})^2}$
$=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2+5t \\ z = 1+t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. On cherche l'intersection de la droite d et du plan $\mathcal{P}$, et pour cela on résout le système : $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2+5t \\ z = 1+t \\ 2x-y-5z = 0 \end{cases}$

On a donc $2\times(5t)-(2+5t)-5(1+t)=0$ soit $10t-2-5t-5-5t=0$ ou $0t=7$.

Le système n'a pas de solution donc la droite d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.

Autre solution à la question 5.a :

$\vec{w}\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}$ dirige la droite d et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

$\vec{w}.\vec{n} = 5\times 2+5\times(-1)+1\times(-5) = 10-10 = 0$ donc $\vec{w}$ *et* $\vec{n}$ sont orthogonaux, et par suite d est parallèle à $\mathcal{P}$. On peut vérifier que le point Q(0 ; 2 ; 1) qui appartient à d n'appartient pas à $\mathcal{P}$ car

$2\times 0-2-5\times 1=-7$ et $-7\neq 0$, donc d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.

b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathcal{P}$.

On veut exprimer le volume V du tétraèdre ANMM′ en fonction de ℓ.

$V = \frac{1}{3}\times B\times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Les points A, M et M′ appartiennent au plan $\mathcal{P}$ donc le triangle AMM′ forme une base du tétraèdre dont la hauteur est la distance du point N au plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire ℓ.

La droite Δ est la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ donc $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à Δ.

A appartient à $\mathcal{D}$, M est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de Δ, M′ appartient à Δ, et les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont perpendiculaires. On peut en déduire que le triangle AMM′ est rectangle en M.

$$\text{AM} = \sqrt{(x_\text{M}-x_\text{A})^2+(y_\text{M}-y_\text{A})^2+(z_\text{M}-z_\text{A})^2}$$
$$= \sqrt{(1-2)^2+(2-4)^2+(0-0)^2} = \sqrt{5}$$

L'aire de la base, c'est-à-dire AMM′ vaut $\frac{1}{2}\times\text{AM}\times\text{MM}' = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$.

Le volume du tétraèdre vaut donc $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{30}}{2}\times\ell = \frac{\ell\sqrt{30}}{6}$.

c. N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d.

La droite d est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$ donc les distances de N_1 et N_2 au plan $\mathcal{P}$ sont égales.

Les bases des tétraèdres $\text{AN}_1\text{MM}'$ et $\text{AN}_2\text{MM}'$ sont identiques (le triangle AMM′).

Donc les tétraèdres $\text{AN}_1\text{MM}'$ et $\text{AN}_2\text{MM}'$ ont le même volume.