Exercice I

1) $\boxed{0{,}86 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 0{,}87}$; $\boxed{0{,}1428 < \frac{1}{7} < 0{,}1429}$

2) $\boxed{P} = 2\pi R = 2\pi \times 10 = \boxed{20\pi \text{ mètres}}$

: $1\text{cm} = \frac{1}{100}\text{ m}$.

On cherche a et b tels que : $a < \pi < b$ donc $20a < 20\pi < 20b$ tels que $20b - 20a = 0{,}01$

$20(b-a) = 0{,}01$, donc $b - a = \frac{0{,}01}{20} = 5\times10^{-4}$

Or $\pi \simeq 3{,}1415926535\ldots$, donc $\underline{3{,}14155 < \pi < 3{,}1416}$ et $3{,}1416 - 3{,}14155 = 5\times10^{-4}$.

On obtient bien : $62{,}831 < P < 62{,}832$

Exercice II

① Faux : par exemple, $3{,}14 < \pi$ mais $3{,}14 > 3{,}1$! ($\pi \simeq 3{,}1415926535$).
Ctrex : $x = 3{,}14$

② Faux : ctrex : $1{,}5 \in [0{,}8 ; 2]$, mais $1{,}5 \notin [0{,}7 ; 1]$ car $1{,}5 > 1$.

③ Faux : $\mathbb{Z} \cap]-1 ; 0[= \emptyset$ (aucun élément commun à ces 2 ensembles).

④ Faux : le décimal $3{,}400000005$ appartient à $]3{,}4 ; 3{,}400001[$.

⑤ Vrai : Si $x > 1$, alors $x \times x > x \times 1$ car $x > 1 > 0$

Donc $\boxed{x^2 > x}$.

Si $x > 1$, alors $x \times x^2 > 1 \times x^2$, c'est-à-dire : $\boxed{x^3 > x^2}$

Ainsi, par transitivité de la relation ($>$) on a : $x^3 > x^2$ et $x^2 > x$, donc $\boxed{x^3 > x}$.

Exercice III

1) a) $x \in [0 ; 1{,}5] \iff 0 \leqslant x \leqslant 1{,}5$

b) $x \in]1{,}2 ; +\infty[\iff x > 1{,}2$

c) $x \notin [3 ; +\infty[\iff x < 3$

2) a) $1 < x \leqslant 3{,}4 \iff x \in]1 ; 3{,}4[$; b) $x > 3 \iff x \in]3 ; +\infty[$.

3a) Faire des dessins !!

a) $\underline{I \cap J = [14 ; 15[}$; $\underline{I \cup J = [12 ; 20]}$.

b) $\underline{I \cap J =]-2\pi ; -\pi]}$; $\underline{I \cup J =]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}}$.

Exercice IV

I- 1) $-3<a\leq 5$, donc $-3+7<a+7\leq 5+7$, c'est-à-dire : $\underline{4<a+7\leq 12}$.

2) $-3<a\leq 5$, donc $-3-5,2<a-5,2\leq 5-5,2$, c'est-à-dire : $\underline{-8,2<a-5,2\leq -0,2}$

3) $-3<a\leq 5$, donc $-3\times 4<4a\leq 4\times 5$ car $4>0$, c'est-à-dire : $\underline{-12<4a\leq 20}$.

4) $-3<a\leq 5$, donc $-6<2a\leq 10$ (car $2>0$), donc $\underline{-14<2a-8\leq 2}$

5) $-3<a\leq 5$, donc $-3\times(-4)>-4a\geq 5\times(-4)$ car $-4<0$, donc $12>-4a\geq -20$

donc $\underline{13>-4a+1\geq -19}$

6) $-3<a\leq 5$, donc $-6<a-3\leq 2$, donc $\underline{\frac{-6}{7}<\frac{a-3}{7}\leq\frac{2}{7}}$ car $7>0$.

II- $A>B>C>0$: donc $\frac{A}{B}>\frac{B}{B}>\frac{C}{B}$ $\underline{\text{car } B>0}$

donc $\frac{A}{B}>1>\frac{C}{B}$: Ainsi, $\boxed{\frac{A}{B}>1 \text{ et } \frac{C}{B}<1}$

III-

a)
$$\begin{array}{l} 1,4\leq x\leq 3,2 \\ -1\leq y\leq 2 \\ \hline \end{array}$$
donc $1,4+(-1)\leq x+y\leq 3,2+2$

$\boxed{0,4\leq x+y\leq 5,2}$

b) $1,4\leq x\leq 3,2$, donc $2,8\leq 2x\leq 6,4$ car $2>0$

$-1\leq y\leq 2$, donc $\underline{-3\leq 3y\leq 6}$ car $3>0$.

Donc : $2,8+(-3)\leq 2x+3y\leq 6,4+6$

$\boxed{-0,2\leq 2x+3y\leq 12,4}$

c) $1,4\leq x\leq 3,2$: $x-y=x+(-y)$ ⚠ Pas de soustraction d'inégalité !

$-1\leq y\leq 2$ donc $-1\times(-1)\geq -1\times y\geq -1\times 2$, donc $-2\leq -y\leq 1$.

Ainsi :
$$\begin{array}{l} 1,4\leq x\leq 3,2 \\ -2\leq -y\leq 1 \\ \hline 1,4+(-2)\leq x+(-y)\leq 3,2+1 \end{array}$$

$\boxed{-0,6\leq x-y\leq 4,2}$

d) $1,4\leq x\leq 3,2$, donc $2,8\leq x\leq 6,4$ (car $2>0$).

$-1\leq y\leq 2$, donc $5\geq -5y\geq -10$ (car $-5<0$).

Ainsi :
$$\begin{array}{l} 2,8\leq x\leq 6,4 \\ -10\leq -5y\leq 5 \\ \hline 2,8+(-10)\leq x+(-5y)\leq 6,4+5 \end{array}$$

$\boxed{-7,2\leq x-5y\leq 11,4}$

Exercice V

Exercice I

1) $2x-7 > 6-(2x-8)$

$2x-7 > 6-2x+8$

$2x+2x > 6+8+7$

$4x > 21$

$x > \frac{21}{4}$ car $4>0$

$S =]\frac{21}{4} ; +\infty[$

$4x-2(6+2x) \leqslant 4-2(x-11)$

$4x-12-4x < 4-2x+22$

$-12 < -2x+26$

$2x < 26+12$

$2x < 38$

$x < \frac{38}{2}$ car $2>0$

$x < 19$

$S =]-\infty ; 19[$.

2) $1-a < 2a+5 < 9-a$ équivaut à :

$1-a < 2a+5$ et $2a+5 < 9-a$.

$1-5 < 2a+a$ et $2a+a < 9-5$

$3a > -4$ et $3a < 4$

$a > -\frac{4}{3}$ et $a < \frac{4}{3}$

$S =]-\frac{4}{3} ; \frac{4}{3}[$, donc

$S_{\mathbb{Z}} = \{-1 ; 0 ; 1\}$ car $a \in \mathbb{Z}$

3) $mx-2 > x+m \iff mx-x > m+2 \iff x(m-1) > m+2$

Distinguons 3 cas : *) Si $m-1>0$, c'est à dire si $m>1$ alors $x(m-1) > m+2$) équivaut à $x > \frac{m+2}{m-1}$ car $m-1>0$.

$\boxed{\text{Si } m>1, \text{ alors } S =]\frac{m+2}{m-1} ; +\infty[.}$

**) Si $m=1$: $x(m-1) > m+2$ s'écrit : $x \times 0 > 3$, c'est à dire $0>3$: absurde.

$\boxed{\text{Si } m=1, \text{ alors } S = \emptyset}$

***) Si $m-1<0$, c'est à dire si $m<1$, alors $x(m-1) > m+2$ équivaut à : $x < \frac{m+2}{m-1}$ car $m-1<0$

$\boxed{\text{Si } m<1, \text{ alors } S =]-\infty ; \frac{m+2}{m-1}[}$

Exercice VI

Soit x le nombre de personnes femmes embauchées. Comme l'entreprise veut embaucher autant de femmes que d'hommes, elle embauchera aussi x hommes, et donc il y aura après embauche, $170+x$ femmes et $270+x$ hommes.

On veut que $170+x \geqslant \overbrace{\frac{2}{3}(270+x)}^{\frac{2}{3} \text{ du nombre d'hommes}}$, donc : $3(170+x) \geqslant 2(270+x)$ car $3>0$

au moins égal

$510+3x \geqslant 540+2x$

$3x-2x \geqslant 540-510$

$x \geqslant 30$.

$S = [30 ; +\infty[$.

Il faut donc embaucher <u>(au moins) 30 femmes et 30 hommes</u>, c'est à dire au minimum <u>60 personnes</u> pour que le nombre de femmes soit au moins égal aux deux tiers du nombre d'hommes.

Exercice VII

Exercice III

a) $(2x-1)(-x+5) > 0$

Faisons un tableau de signes : $2x-1 \geq 0$ équivaut à $2x \geq 1$ c'est à dire à $x \geq \frac{1}{2}$ $(2>0)$.

$-x+5 \geq 0$ équivaut à $5 \geq x$ c'est à dire $x \leq 5$.

D'où :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
Signe de $2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(2x-1)(-x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Grâce au tableau de signes : $(2x-1)(-x+5) > 0$ si et seulement si : $\frac{1}{2} < x < 5$.

$\boxed{S = \left]\frac{1}{2} ; 5\right[}$.

b) $\dfrac{2x+3}{3x-5} \geq 0$.

Faisons un tableau de signes : $2x+3 \geq 0$ équivaut à $2x \geq -3$, c'est à dire $x \geq -\frac{3}{2}$ $(2>0)$

$3x-5 \geq 0$ équivaut à $3x \geq 5$, c'est à dire $x \geq \frac{5}{3}$ $(3>0)$.

⚠ $3x-5=0$ ssi $x=\frac{5}{3}$: $\frac{5}{3}$ est la valeur interdite pour le quotient $\dfrac{2x+3}{3x-5}$.

D'où :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{2x+3}{3x-5}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

D'après le tableau de signes, $\dfrac{2x+3}{3x-5} \geq 0$ équivaut à : $x \in \left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right] \cup \left]\frac{5}{3} ; +\infty\right[$.

$\boxed{S = \left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right] \cup \left]\frac{5}{3} ; +\infty\right[}$

Exercice VIII

Exercice VI → Vent v

Ouest A × ———— × B Est

0) Notons $v_{A\to B}$ la vitesse de l'avion lorsqu'il va de A vers B : $v_{A\to B} = V + v$ (effet favorable du vent dans ce sens là).

Notons $v_{B\to A}$ ———— B vers A : $v_{B\to A} = V - v$ (le vent contrarie le mouvement dans ce sens là)

1) i) $t = t_{aller} + t_{retour}$ et la relation temps $= \dfrac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$ conduit à :

$$t = \frac{d}{V} + \frac{d}{V} = \frac{2d}{V}$$ (absence de vent ici), donc $t_{aller} = t_{retour}$!

ii) $T = t'_{aller} + \underbrace{t'_{retour}}$

$$T = \frac{d}{V+v} + \frac{d}{V-v}$$

2) Il s'agit tout bêtement de comparer T et t : si $T > t$, l'effet du vent sera défavorable à l'avion, sinon il sera favorable à l'avion.

Or, $$T - t = \frac{d}{V+v} + \frac{d}{V-v} - \frac{2d}{V} = d \times \left(\frac{1}{V+v} + \frac{1}{V-v} - \frac{2}{V}\right)$$

$$T - t = d \times \left(\frac{V(V-v)}{V(V+v)(V-v)} + \frac{V(V+v)}{V(V+v)(V-v)} - \frac{2(V+v)(V-v)}{V(V+v)(V-v)}\right)$$

$$T - t = d \times \left(\frac{V^2 - \cancel{Vv} + V^2 + \cancel{Vv} - 2(V^2 - v^2)}{V(V+v)(V-v)}\right)$$

$$T - t = \frac{d \times (2V^2 - 2V^2 + 2v^2)}{V(V+v)(V-v)} = \frac{d \times 2v^2}{V(V+v)(V-v)} = \frac{2dv^2}{V(V+v)(V-v)}$$

Or $d > 0$, $v > 0$, $V > 0$ et $2 > 0$ et $v < V$, donc $V - v > 0$:

donc $\dfrac{2dv^2}{V(V+v)(V-v)} > 0$, donc $T - t > 0$, donc $T > t$: sur un aller-retour, le vent aura toujours un effet défavorable sur la durée de vol de l'avion.