

Exercice I

a) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1-x}}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x+1) = 2$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1-x) = 0^+$. Or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$, donc par limite de composée, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt{1-x} = 0^+$ et par limite de quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$.

b) $g(x) = -2x + 30 \sin(x)$.
 $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $-30 \leq 30 \sin(x) \leq 30$ car $30 > 0$.
 donc en particulier, $-2x + 30 \sin(x) \leq -2x + 30$
 Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 30) = -\infty$, donc d'après la règle de comparaison des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

c) $h(x) = 4x + 3 - 2\sqrt{x}$.
 Soit $x > 0$, $h(x) = x \left(4 + \frac{3}{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x} \right) = x \left(4 + \frac{3}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$.
 Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc par limite de produit et de somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{3}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = 4$.
 Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc par limite de produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

Exercice II

(d1) a pour équation $x = -2$ et (d2) a pour équation $x = 1$.

① $y = -1$ est une droite horizontale asymptote à \mathcal{C}_f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$; (A3) a pour équation: $y = -1$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$

③

Exercice III

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

a) $g(x)$ existe ssi $f(x) \neq 0$ ssi $x \neq 3$. donc $\text{D}_g =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et par quotient de limites.
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} g(x) = +\infty$ car $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = 0^+$ et par quotient de limites.
 de même, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} g(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$ et par quotient de limites.

c) (*) établit que \mathcal{C}_g a pour asymptote horizontale l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.
 (**) établit que \mathcal{C}_g a pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 3$.

Exercice IV

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$. $f(x)$ est calculable si et seulement si $\frac{x+2}{x-3} \geq 0$.

On fait un tableau de signes: $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$; $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
x+2	-	o	+	+
x-3	-	-	o	+
$\frac{x+2}{x-3}$	+	o	-	+

donc $\frac{x+2}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-2; 3[\cup]3; +\infty[$.

$$\text{Df} =]-2; 3[\cup]3; +\infty[$$

2) On cherche $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ où $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$.

$$\text{Pour } x \neq 0, \frac{x+2}{x-3} = \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(1-\frac{3}{x})} = \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}$$

On peut utiliser la limite de référence, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc par limite de produit et de somme: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+\frac{2}{x}) = 1$

Par limite de quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-3} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-\frac{3}{x}) = 1$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1$, donc par limite de fonctions composées on a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$; la droite d'équation

$y=1$ est donc asymptote horizontale à f au voisinage de $+\infty$.

Exercice V

44 a) La fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} donc pour tout réel $x > 0$, $e^x > e^0$ c'est-à-dire $e^x > 1$.

La fonction inverse est strictement décroissante sur

$]0; +\infty[$ donc pour tout réel $x > 0$,

$$0 \leq \frac{1}{e^x} \leq 1 \text{ c'est-à-dire } 0 \leq e^{-x} \leq 1.$$

Ainsi pour tout réel $x > 0$, $0 \leq \frac{e^{-x}}{x} \leq \frac{1}{x}$ c'est-à-dire

$$0 \leq g(x) \leq \frac{1}{x}.$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

54 • Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$$f(x) = x^3 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2} \right).$$

• D'après les règles opératoires

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2} \right) = \frac{1}{4}.$$

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• D'après les règles opératoires

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2} \right) = \frac{1}{4}.$$

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

67 • $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$.

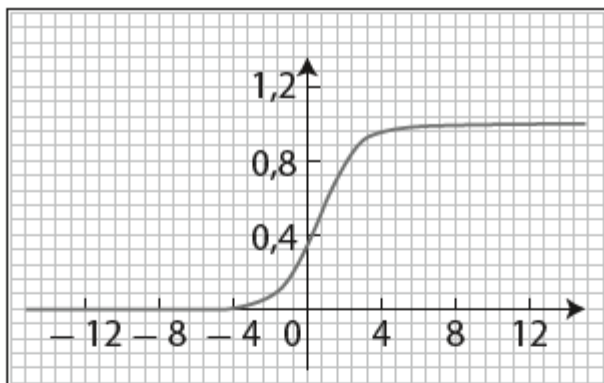
D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1) = +\infty$, d'après la limite d'un quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 0$.

D'après la limite d'une somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1$, d'après la limite d'un quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 4$.

D'après la limite d'une somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$.

69 a)

On conjecture que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + e^x) = 2$.

D'après la limite d'un quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

$$\text{c) } f(x) = \frac{e^x}{e^x \left(\frac{2}{e^x} + 1 \right)} = \frac{1}{2e^{-x} + 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{-x} + 1) = 1.$$

D'après la limite d'un quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

d) On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

La droite d d'équation $y = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe \mathcal{C} .

La droite d' d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe \mathcal{C} .

77 Pour tout réel $x > 0$, $k(x) = e^{2x} \times \left(1 - \frac{x}{e^x} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = 0 \text{ et alors}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{e^x} \right) = 1. \text{ D'autre part, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty.$$

D'après la limite d'un produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$.

Exercice VI

101 1. La fonction Q est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel $t \geq 0$, $Q'(t) = -1,2 \times 1,8e^{-1,2t}$.

Pour tout réel $t \geq 0$, $Q'(t) < 0$ donc la fonction Q est décroissante sur $[0; +\infty[$.

2. a) On utilise le schéma de décomposition ci-contre.

$$t \mapsto \underbrace{-1,2t}_{T \mapsto e^T}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T = -\infty \text{ et } \lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0.$$

Ainsi $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-1,2t} = 0.$

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = 0.$

b) La quantité de médicament tend vers 0 quand t augmente.

3. a) On est certain que l'algorithme se termine.

En effet, $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = 0$ donc pour tout réel positif R ,

l'intervalle $]0; R[$ contient tous les nombres $Q(t)$ pour t assez grand.

```
b) from math import*
def Q(t):
    y=1.8*exp(-1.2*t)
    return y
def Seuil(R):
    t=0
    while(Q(t)>R):
        t=t+0.01
    return(t)
```

c) $R = 0,9t = 0,58$
 $R = 0,1t = 2,41$
 $R = 0,05t = 2,99$

Remarque : erreur à la ligne du While : c'est : $While (Q(t) > = R).$

Exercice VII

102 1. a) $f(x) = \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x(1 - e^{-3x})} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-3x}}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-2x}) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-3x}) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

b) $f(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x} + 1)}{e^{-2x}(e^{3x} - 1)} = e^x \times \frac{e^{2x} + 1}{e^{3x} - 1}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + 1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{3x} - 1) = -1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{3x} - 1} \right) = -1$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

D'après la limite d'un produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x}) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-2x}) = 0$.

On construit le tableau de signe de $e^x - e^{-2x}$.

Pour cela on peut remarquer que

$e^x - e^{-2x} = e^{-2x}(e^{3x} - 1)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - e^{-2x}$	$-$	0	$+$

On en déduit $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

3. La droite d_1 d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe.

La droite d_2 d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe.

La droite d_3 d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe.

Exercice VIII

$$a) \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

donc par la règle de somme et produit: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty, \text{ donc par somme et produit: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$$

Par le même procédé, on obtient sans mal: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$

$$b) \forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}, \text{ et } \operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch}(x)$$

donc ch est paire sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0, e^{-x} > 0, 2 > 0, \text{ donc } \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0, \text{ donc } \operatorname{ch}(x) > 0$$

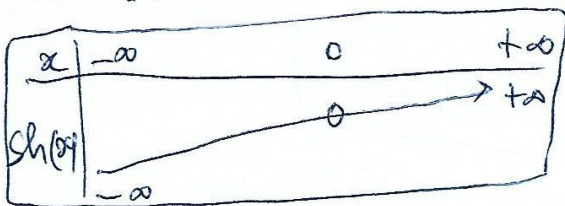
$$\text{de même: } \operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{(e^x - e^{-x})}{2} = -\operatorname{sh}(x)$$

donc sh est impaire sur \mathbb{R} .

$$c) \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}'(x) = \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$$

D'après (b), $\operatorname{ch}(x) > 0$ sur \mathbb{R} , donc $\operatorname{sh}'(x) > 0$ sur \mathbb{R} donc sh est strictement

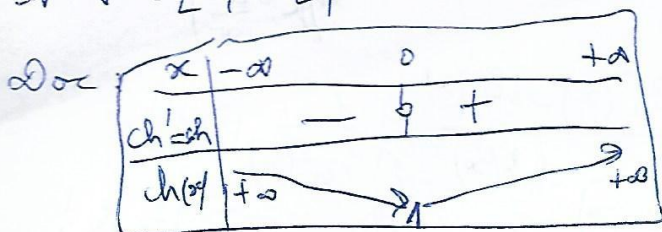
croissante sur \mathbb{R} .



$$d) \operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$$

Grâce à c): sh croît sur \mathbb{R} et $\operatorname{sh}(0) = 0$, donc $\forall x \in]-\infty; 0]$, $\operatorname{sh}(x) \leq 0$

et $\forall x \in [0; +\infty[$, $\operatorname{sh}(x) \geq 0$



$$\operatorname{ch}(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

e) ch et sh sont deux fois dérivables sur \mathbb{R} et :

$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}''(x) = \text{ch}(x)$. Or $\text{ch}(x) \geq 1 > 0$, donc ch est CONVEXE sur \mathbb{R} .

$\text{sh}''(x) = \text{sh}(x)$ et $\text{sh}(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$, donc sh est CONVEXE sur $]\infty, +\infty[$ et Concave sur $]-\infty, 0]$.

f) $\forall x \in \mathbb{R}: \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = (\text{ch}(x) + \text{sh}(x))(\text{ch}(x) - \text{sh}(x))$ (Formule 3)

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$$

$$\boxed{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)} = \frac{2e^x}{2} \times \frac{2e^{-x}}{2} = e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = \boxed{1}$$

g) $h(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) \geq 1$, donc $\text{ch}(x) \neq 0$ (pas de $0/0$ par le quotient).

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 1) = -1$ et de même

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + 1) = 1$, donc par quotient: $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1}$

En observant que h est impaire sur \mathbb{R} , on obtient sans peine: $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1}$

h a donc deux asymptotes horizontales: $y = -1$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$.

i) $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{\text{sh}'(x)\text{ch}(x) - \text{sh}(x)\text{ch}'(x)}{\text{ch}^2(x)}$ (dérivée d'un quotient de type $\frac{u}{v}$).

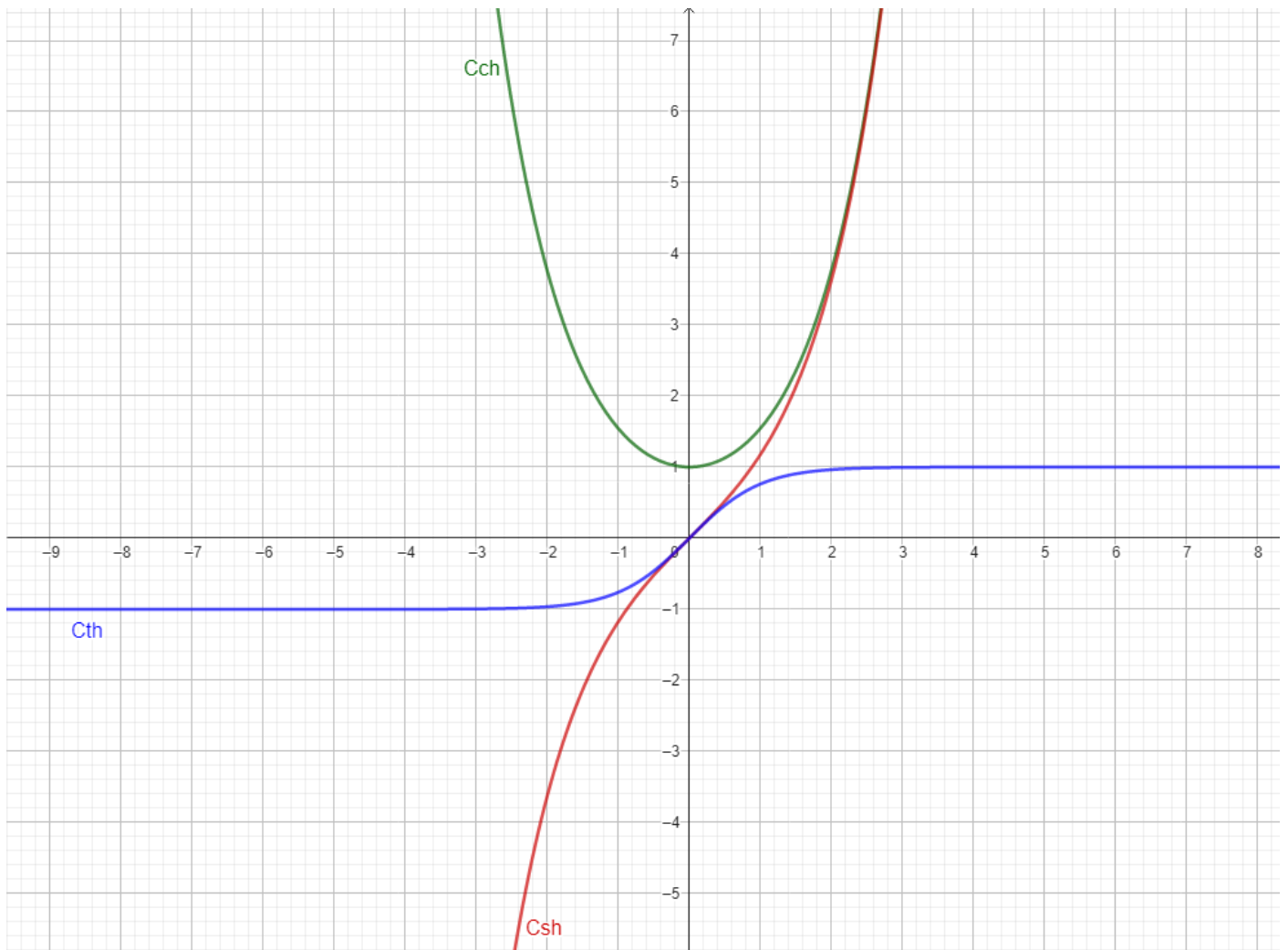
Grâce à (c) et (d): $h'(x) = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} (> 0)$.

donc h croît strictement sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	-1	1

(f)

f) fautive!



BONUS:

I-

FAUX : *l'exo 69 que vous venez de traiter dans l'exercice IV vous donne un contre-exemple.*

Ou encore plus simplement : *prenons les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = x+1$ et $g(x) = x$.*

$f(x)/g(x) = \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ qui admet par limite de référence et de somme 1 pour limite en $+\infty$, et

$f(x) - g(x) = x + 1 - x = 1$ donc la limite de $f - g$ en $+\infty$ est égale à 1 et pas à 0 !!!

II-

