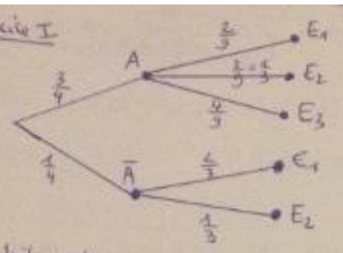
Exercice I

Exercice I

1a)



$P(A) = \frac{900}{1200} = \frac{3}{4}$

1b) $\boxed{P(\bar{A} \cap E_2)} = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(E_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{12}}$

La probabilité que la personne interrogée prenne l'escalier (ET) aille au 2^e étage et égale à $\frac{1}{12}$.

1c) On doit montrer que : $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3)$ $(= \frac{1}{3}\,!)$

Or $P(E_1) = \underbrace{P(A \cap E_1)} + P(\bar{A} \cap E_1)$ d'après la formule des probabilités totales.

$P(E_1) = P(A) \times P_A(E_1) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(E_1)$

$P(E_1) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

$\boxed{P(E_1)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

De même, $P(E_2) = \underbrace{P(A \cap E_2)} + \underbrace{P(\bar{A} \cap E_2)}$

$\boxed{P(E_2)} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$

Comme (E_1, E_2, E_3) forment une partition de l'univers des possibles, on a : $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$

donc $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + P(E_3) = 1$, donc $P(E_3) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Par suite, $\boxed{P(E_1) = P(E_2) = P(E_3), \text{ donc } E_1, E_2 \text{ et } E_3 \text{ sont équiprobables}}$

1d) On cherche ici : $P_{E_2}(\bar{A})$: D'après la relation des probabilités conditionnelles on a :

$\boxed{P_{E_2}(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A} \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(E_2)}{P(E_2)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{1}{4}}$

2) Interroger une personne et lui demander si elle va au $2^{ème}$ étage ou non constitue une épreuve de Bernoulli (le succès et ici : aller au $2^{ème}$ étage). Le paramètre p de cette dernière est $p = \frac{1}{3}$ d'après 1c).

On répète 60 fois cette même épreuve, de façon indépendante.

La variable aléatoire X égale au nombre de personnes allant au $2^{ème}$ étage parmi les 60 interrogés suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(60\,;\frac{1}{3})$: $\boxed{X \sim \mathcal{B}(60\,;\frac{1}{3})}$

b) On cherche ici : $P(X=15)=\binom{60}{15}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{15}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^{60-15}=\binom{60}{15}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{15}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{45}$.

On tape : BinomFdp$(60, \frac{1}{3}, 15)$

Donc $\boxed{P(X=15)\simeq 0{,}0442 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}}$

c) On cherche ici $E(X)=n\times p=60\times\frac{1}{3}=20$.

En moyenne, on peut s'attendre à 20 personnes (sur les 60 interrogés) allant au $2^{\text{ème}}$ étage.

d) On cherche ici : $P(X\geq 6)$

Or $P(X\geq 6)=1-P(X<6)=1-P(X\leq 5)$ car X est à valeurs entières.

$P(X\geq 6)=1-$ BinomFRep$(60, \frac{1}{3}, 5)$

$\boxed{P(X\geq 20)\simeq 0{,}440 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

Exercice II (45 page 442)

Lorsqu'on tire une cordelette, la probabilité p de gagner est : $p = \frac{30}{250} = 0,12$

a) Tirer une cordelette constitue une épreuve de Bernoulli : soit on gagne le gros lot (succès) avec une probabilité $p = 0,12$, soit on perd !
on répète trois fois cette même épreuve de Bernoulli, de façon indépendante, donc on a un schéma de Bernoulli.
La variable aléatoire X égale au nombre $\overbrace{\text{de gros lots gagnés}}^{=\text{nombre de succès}}$ par le joueur au cours de ce schéma de Bernoulli suit donc la loi binomiale de paramètres : $n = 3$ et $p = 0,12$.

$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(3\,;0,12)}$

b) on cherche ici la valeur de $P(X=0)$.
On rappelle que si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n\,;p)$, alors, pour tout entier k tel que : $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ici, $k=0$; $n=3$; $p=0,12$.

donc $P(X=0) = \binom{3}{0} \times 0,12^0 \times (1-0,12)^{3-0} = 1 \times 1 \times 0,88^3 = 0,88^3$

$\boxed{P(X=0) \approx 0,68 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$

c) on cherche ici la valeur de $P(X \geq 1)$.
Or, $P(X \geq 1) = 1 - P(\overline{X \geq 1}) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0)$ car X est à valeurs entières !

$P(X \geq 1) \simeq 1 - 0,68$

$\boxed{P(X \geq 1) \simeq 0,32 \text{ au centième près.}}$

d) on cherche ici la valeur de $P(X=2)$:

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \times 0,12^2 \times (1-0,12)^{3-1} = \binom{3}{2} \times 0,12^2 \times 0,88$$

on peut taper directement sur la T.I : $P(X=2) = $ BinomFdp(3, 0.12, 2)

$\boxed{P(X=2) \simeq 0,04 \text{ au centième près}}$

Exercice II (70 page 450)

Notons R l'événement : l'avion est en retard et T : le retard est de plus de 3^h.

$P(R) = 0{,}04$; $P_R(T) = 0{,}22$

d'après la formule des probabilités conditionnelles : $\overbrace{P(T)}^{P(R \cap T)} = P(R) \times P_R(T) = 0{,}04 \times 0{,}22 = 0{,}0088$.

Effectuer un vol courte distance constitue une épreuve de Bernoulli : soit le vol a un retard de plus de 3^h (Succès) soit il a moins de 3^h de retard.

Alexandra répète 20 fois (10 allers retours) de façon indépendante cette même épreuve de Bernoulli.

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de retards de plus de 3^h lors de ces 20 voyages :

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0{,}0088)$

$750^€ = 250^€ \times 3$, donc on cherche ici la valeur de $P(X=3)$:

$P(X=3) = \binom{20}{3} \times 0{,}0088^3 \times (1-0{,}0088)^{20-3}$ et on tape sur T.I : BinomFdp(20, 0.0088, 3)

$\boxed{P(X=3) \simeq 6{,}7 \times 10^{-4}}$

Exercice IV

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(30\,;0{,}9)$

a) $P(X=27) = \text{BinomFdp}(30, 0.9, 27)$

$P(X=27) \approx 0{,}2361$ à 10^{-4} près.

b) $P(X \leqslant 25) = \text{BinomFrep}(30, 0.9, 25)$

$P(X \leqslant 25) \approx 0{,}1755$ à 10^{-4} près.

c) $P(X \geqslant 27) = 1 - P(X < 27) = 1 - P(X \leqslant 26)$ car X est à valeurs entières.

et $\overline{(X \geqslant 27)}$ est l'évènement : $X < 27$.

$P(X \geqslant 27) = 1 - \text{BinomFrep}(30, 0.9, 26)$

$P(X \geqslant 27) \approx 0{,}6474$ à 10^{-4} près

d) $P(21 \leqslant X \leqslant 27) = P(X \leqslant 27) - P(X \leqslant 20) = \text{BinomFrep}(30, 0.9, 27) - \text{BinomFrep}(30, 0.9, 20)$

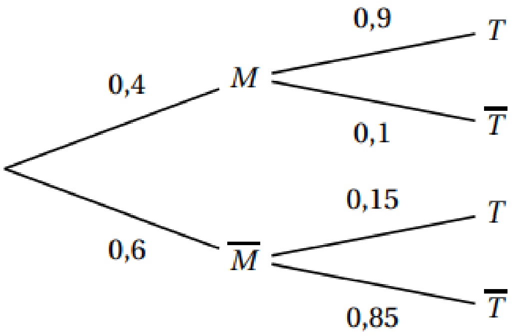
$P(21 \leqslant X \leqslant 27) \approx 0{,}5882$ à 10^{-4} près.

e) Grâce à une table de valeurs : $Y = \text{binomFrep}(30, 0.9, X)$

b	$P(X \leqslant b)$
28	0,8163
29	0,9576

On trouve sans peine $b = 29$

Exercice V



b. Il faut trouver $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

c. On a de même $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$.
D'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,36 + 0,09 = 0,45$.

d. Il faut trouver $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,36}{0,45} = \dfrac{36}{45} = \dfrac{9 \times 4}{9 \times 5} = \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{10} = 0,8$.

2. **a.** On suppose que le nombre de chats est assez important pour que l'on puisse assimiler le choix des 20 chats à un tirage avec remise.
La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et de probabilité $p = 0,45$ trouvé à la question **1. c.**.

b. On a $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,45^5 \times (1 - 0,45)^{20-5} = 15504 \times 0,45^5 \times 0,55^{15} \approx 0,0365$ soit environ 0,037.

c. La calculatrice donne $P(X < 9) \approx 0,414$.

d. On sait que l'espérance $E = n \times p = 20 \times 0,45 = 9$.
Cela signifie que sur un grand nombre d'échantillons il y aura en moyenne 9 chats positifs par échantillon de 20.

3. **a.** On a encore une loi binomiale de paramètres n et de probabilité d'être positif de $0,45$.
On a $P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,45^0 \times 0,55^n = 0,55^n$.

Donc $p_n = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,55^n$.

b. En partant de $n = 0$, le programme calcule p_n et augmente la taille de l'échantillon de 1 tant que $p_n < 0,99$.

On cherche donc n tel que $1 - 0,55^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,55^n$, *grâce à une table de valeurs de la calculatrice par exemple, on trouve sans peine que n = 8.*

Exercice VI

<u>Exercice IV</u>

1a) $P(B)\neq 0$, donc $P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Or $\{A\,;\,\bar{A}\}$ partitionne Ω, donc $B = (A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)$ (union disjointe c'est-à-dire $A\cap B$ et $\bar{A}\cap B$ incompatibles).

$$P(B) = \underbrace{P(A\cap B)} + \underbrace{P(\bar{A}\cap B)}$$

$$P(B) = \overbrace{P(A)\times P_A(B)} + \overbrace{P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(B)}$$ (Ici l'énoncé aurait du préciser que $P(\bar{A})\neq 0$).

D'où : $\boxed{P_B(A) = \dfrac{P(A)\times P_A(B)}{P(A)\times P_A(B) + P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(B)}}$ (relation de Bayes).

1b) Nommons A = " la personne est atteinte de la maladie"

B = " le test est positif".

on a : $p(A) = x$ et on cherche $P_B(A)$. Grâce à la question précédente, en tenant compte du fait que $P_A(B) = \dfrac{99}{100} = 0{,}99$ et $P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{0{,}1}{100} = 0{,}001$ on a : $f(x) = \dfrac{x\times 0{,}99}{x\times 0{,}99 + \underbrace{(1-x)}_{P(\bar{A}) = 1-P(A) = 1-x}\times 0{,}001}$

D'où : $f(x) = \dfrac{0{,}99x}{0{,}99x + 0{,}001 - 0{,}001x} = \dfrac{0{,}99x}{0{,}989x + 0{,}001}$

$$\boxed{f(x)} = \frac{0{,}99x\times 1000}{(0{,}989x + 0{,}001)\times 1000} = \boxed{\frac{990x}{989x+1}}$$

2a) $0\leq x\leq 1$ et $f(x) = \dfrac{990x}{989x+1}$: f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec : $\begin{cases} u(x) = 990x \\ u'(x) = 990 \end{cases}$

f est dérivable sur $[0;1]$

Donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $\quad\begin{cases} v(x) = 989x+1 \\ v'(x) = 989 \end{cases}$

d'où $\forall x\in[0;1]$, $f'(x) = \dfrac{990(989x+1) - 990x\times 989}{(989x+1)^2}$

$$\boxed{f'(x)} = \frac{\cancel{990\times 989x} + 990 - \cancel{990\times 989x}}{(989x+1)^2} = \boxed{\frac{990}{(989x+1)^2}}.$$

Or $990 > 0$ et $(989x+1)^2 > 0$ (pour tout réel x)..

Donc, $\forall x\in[0;1]$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0;1]$.

2b) Ici $x = \dfrac{1}{10.000} = 10^{-4}$. Donc $f(x) = f(10^{-4}) = \dfrac{990\times 10^{-4}}{980\times 10^{-4}+1}$

$f(10^{-4}) \approx 0{,}09$ (soit environ 9 %).

On peut légitimement penser que ce test n'est pas efficace et ne doit pas être commercialisé —

2c) On cherche $x \in [0;1]$ tel que $f(x) \geq 0,99$

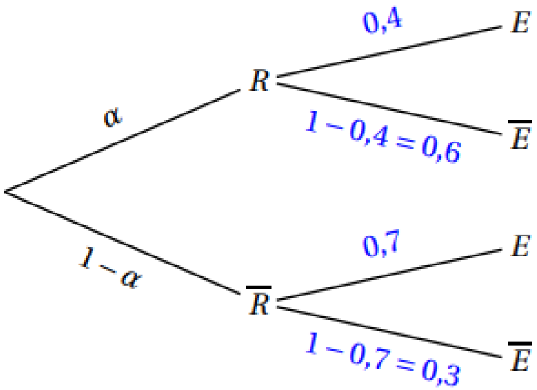
$f(x) \geq 0,99 \iff \dfrac{990x}{989x+1} \geq 0,99 \iff \dfrac{990x}{989x+1} \geq \dfrac{99}{100} \underset{\div 99 \text{ car } 99>0}{\iff} \dfrac{10x}{989x+1} \geq \dfrac{1}{100}$

$f(x) \geq 0,99 \underset{\times 100 \text{ car } 100>0}{\iff} \dfrac{1000x}{989x+1} \geq 1 \underset{\text{car } 989x+1>0 \text{ vu que } 0<x<1}{\iff} 1000x \geq 989x+1 \iff 11x \geq 1 \underset{\text{car } 11>0}{\iff} x \geq \dfrac{1}{11}$

Il faudrait donc au minimum $\frac{1}{11}$ de personnes malades dans la population pour que la valeur prédictive du test soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice VII

1. On complète l'arbre proposé.



2. **a.** D'après la formule des probabilités totales :

$p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right) = \alpha \times 0,4 + (1-\alpha) \times 0,7 = 0,4\alpha + 0,7 - 0,7\alpha = 0,7 - 0,3\alpha.$

b. La probabilité que le client loue un vélo électrique est $p(E) = 0,58$.

Or $p(E) = 0,7 - 0,3\alpha$. Donc $0,7 - 0,3\alpha = 0,58$ ce qui équivaut à $0,7 - 0,58 = 0,3\alpha$ ou encore $0,12 = 0,3\alpha$ soit $\alpha = 0,4$.

3. On sait que le client a loué un vélo électrique.

La probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain est :

$$p_E\left(\overline{R}\right) = \frac{p\left(\overline{R} \cap E\right)}{p(E)} = \frac{(1-0,4) \times 0,7}{0,58} = \frac{0,42}{0,58} \approx 0,72.$$

4. La probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique est : $p\left(\overline{R}\cap E\right) = 0{,}42$.

5. Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros. Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros.

   On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.

   a. On a quatre possibilités.

   - La location d'un vélo de route non électrique coûte 25 €.
     Cela correspond à l'évènement $R\cap\overline{E}$ de probabilité $0{,}4\times 0{,}6 = 0{,}24$.
   - La location d'un vélo de route électrique coûte $25+15$ soit 40 €.
     Cela correspond à l'évènement $R\cap E$ de probabilité $0{,}4\times 0{,}4 = 0{,}16$.
   - La location d'un vélo tout terrain non électrique coûte 35 €.
     Cela correspond à l'évènement $\overline{R}\cap\overline{E}$ de probabilité $0{,}6\times 0{,}3 = 0{,}18$.
   - La location d'un vélo tout terrain électrique coûte $35+15$ soit 50 €.
     Cela correspond à l'évènement $\overline{R}\cap E$ de probabilité $0{,}6\times 0{,}7 = 0{,}42$.

   On établit la loi de probabilité de X :

x_i	25	35	40	50
$p_i = p(X = x_i)$	0,24	0,18	0,16	0,42

   b. L'espérance mathématique de X est :
   $E(X) = \sum x_i \times p_i = 25\times 0{,}24 + 35\times 0{,}18 + 40\times 0{,}16 + 50\times 0{,}42 = 39{,}7$.
   Le coût moyen d'une location est donc de 39,70 euros.

6. Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.

   On rappelle que la probabilité de l'évènement E est : $p(E) = 0{,}58$.

a. Il s'agit d'une répétition de 30 épreuves identiques et indépendantes n'ayant que deux issues, la probabilité du succès pour une épreuve étant égale à 0,58.

Donc la variable aléatoire Y qui donne le nombre de succès sur 30 tirages, suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}58$.

b. La probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique est :

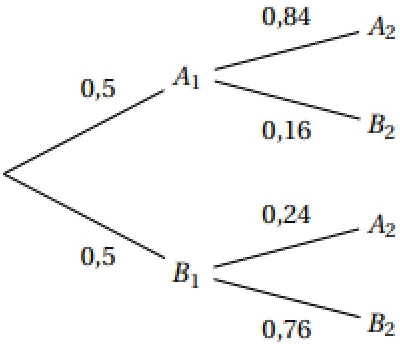
$p(Y = 20) = \binom{30}{20}\times 0{,}58^{20}\times(1-0{,}58)^{30-20} \approx 0{,}095$.

c. La probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique est :

$p(Y \geqslant 15) = 1 - p(Y < 14) \approx 1 - 0{,}14190 \approx 0{,}858$.

Exercice final

1. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



2. **a.** Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $a_2 = p(A_2)$:

$a_2 = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap B_1) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)$

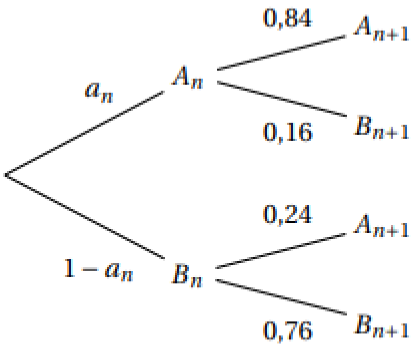
$= 0,84 \times 0,5 + 0,24 \times 0,5 = 0,54$. Donc $a_2 = 0,54$.

b. Utilisons la formule de Bayes pour calculer $p_{A_2}(B_1)$:

$$p_{A_2}(B_1) = \frac{p(A_2 \cap B_1)}{p(A_2)} = \frac{p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)}{p(A_2)} = \frac{0,24 \times 0,5}{0,54} \approx 0,222$$

3. **a.** On remarquera au préalable que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n = 1$.

L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. Utilisons là encore, la formule des probabilités totales pour déterminer a_{n+1} en fonction de a_n, pour tout entier naturel non nul :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n)$

$= 0,84 \times p(A_n) + 0,24 \times p(B_n) = 0,84\ a_n + 0,24\ b_n$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 1 - a_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 0,84\ a_n + 0,24(1 - a_n) = 0,6\ a_n + 0,24$

c. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

Initialisation : $a_1 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{1-1} = 0,6 - 0,1 = 0,5$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

Montrons que $a_{n+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$.

D'après la question précédente,$a_{n+1} = 0,6\ a_n + 0,24$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$a_{n+1} = 0,6\left(0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}\right) + 0,24 = 0,36 - 0,1 \times 0,6 \times 0,6^{n-1} + 0,24 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$. On obtient ce qu'il fallait démontrer. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^{n-1} = 0$ car $0,6 \in]-1\ ;\ 1[$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6$.

Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, la probabilité qu'un vélo soit à la station A est de 60 %.

6 a) $a_n \leqslant 0,6 \Leftrightarrow 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} \leqslant 0,6$

donc $-0,1 \times 0,6^{n-1} \leqslant 0$

or $n \geqslant 1$, donc $n-1 \geqslant 0$, et $0,6 > 0$, donc $0,6^{n-1} > 0$

$-0,1 < 0$, donc $-0,1 \times 0,6^{n-1} \leqslant 0$

Ainsi, $0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} \leqslant 0,6$ est vraie, donc

$\boxed{a_n \leqslant 0,6 \text{ est vraie, donc } (a_n) \text{ est majorée par } 0,6}$ Bien

b) On vient de démontrer que $a_n \leqslant 0,6$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)

donc $a_n^2 \leqslant 0,6\, a_n$ car a_n est une

donc $a_n^2 + 0,24 \leqslant 0,6\, a_n + 0,24$ probabilité, donc $a_n \geqslant 0$ Bien

donc $a_n^2 + 0,24 \leqslant a_{n+1}$

or $a_n \leqslant a_n^2 + 0,24$ car $a_n \in [0;1]$, or la fonction carrée croît sur l'intervalle $[0;1]$, et $0,24 > 0$. Bien

on obtient donc $a_n \leqslant a_n^2 + 0,24 \leqslant a_{n+1}$ et alors par perte d'informatio

$\boxed{a_n \leqslant a_{n+1} \text{ donc } (a_n) \text{ est croissante}}$ Bien

c) (a_n) est majorée (par 0,6) et croissante, donc d'après le théorème de convergence des suites monotones, (a_n) converge.

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} (a_n) = \lim_{n \to +\infty} (0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}) = 0,6}$ par limite de produit et de somme,

car $\lim_{n \to +\infty} (0,6^{n-1}) = 0$ car $-1 < 0,6 < 1$. TB Bien

Exercice VII

On peut (doit?) ici faire un arbre pour obtenir p(E_2) !!!

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

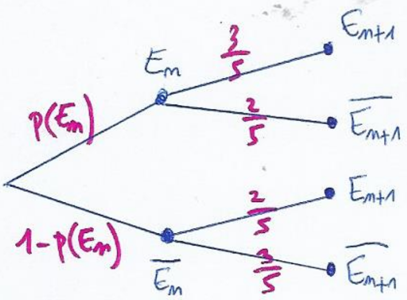
a. On a $p(E_1) = \frac{2}{5}$, $p_{E_1}(E_2) = \frac{3}{5}$ et $p_{\overline{E_1}}(E_2) = \frac{2}{5}$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée à E_1 et à $\overline{E_1}$:

$p(E_2) = p(E_1 \cap E_2) + p\left(E_1 \cap \overline{E_2}\right) = p(E_1) \times p_{E_1}(E_2) + p\left(\overline{E_1}\right) \times p_{\overline{E_1}}(E_2) =$

$\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \left(1 - \frac{2}{5}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25} = 0,48.$

b



Si E_n est réalisé, alors on ajoute une bille verte dans E_{n+1} qui contient alors 3 billes vertes et 2 jaunes

donc $P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{3}{5}$.

Même principe si $\overline{E_n}$ est réalisé : E_{n+1} contient alors 2 billes vertes et 3 jaunes donc $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{2}{5}$.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(E_{n+1}) = P(E_n \cap E_{n+1}) + P(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$

$P(E_{n+1}) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\overline{E_n}) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$

$P(E_{n+1}) = P(E_n) \times \frac{3}{5} + \left(1 - P(E_n)\right) \times \frac{2}{5}$

$P(E_{n+1}) = \frac{3}{5} P(E_n) + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} P(E_n) = \frac{1}{5} P(E_n) + \frac{2}{5}$

Attention, l'auteur du corrigé rédige très vite la récurrence ci-dessous et ne définit pas la propriété P(n) qui est ici :

$u_n \leq \frac{1}{2}$:

2. Étude d'une suite

a. Démonstration par récurrence :

— *Initialisation* : $u_1 = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$: vrai ; la relation est vraie au rang 1.

— *Hérédité* : soit un naturel $n \geqslant 1$ et supposons que $u_n < \frac{1}{2}$; alors $\frac{1}{5}u_n < \frac{1}{10} \iff \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} < \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \iff u_{n+1} < \frac{5}{10}$. Soit finalement $u_{n+1} < \frac{1}{2}$. La relation est vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang et si elle est vraie au rang $n \geqslant 1$, elle est vraie au rang $n+1$. On a démontré par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \frac{1}{2}$.

b. Pour tout naturel $n > 0$,

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} - u_n = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}u_n = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$.

D'après la question précédente $u_n \leqslant \frac{1}{2}$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

La suite (u_n) est croissante

c. La suite est croissante et majorée par 1 : elle converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 1$.

ℓ vérifie la relation de récurrence : $\ell = \frac{1}{5}\ell + \frac{2}{5} \iff 5\ell = \ell + 2 \iff 4\ell = 2 \iff \ell = \frac{1}{2}$.

3. a. On a de façon évidente $u_n = p(E_n)$ et par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} p(E_n) = \frac{1}{2}$.

A très long terme, la probabilité de piocher une bille verte se stabilise à $\frac{1}{2}$