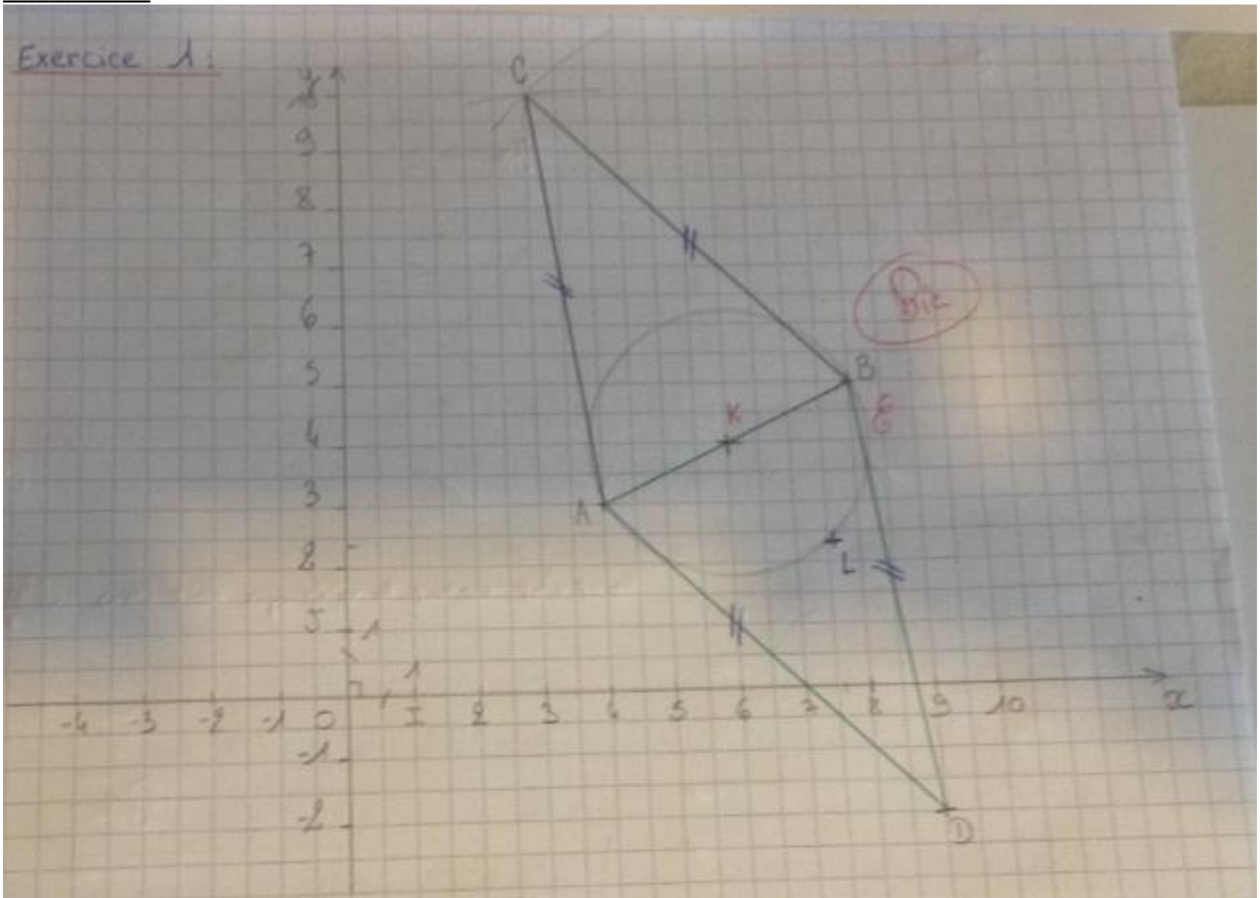
Exercice I



b) On sait que K = milieu de [AB], donc K a pour coordonnées (x_K ; y_K)

$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$

$x_K = \frac{4 + 8}{2}$ $y_K = \frac{3+5}{2}$

$x_K = \frac{12}{2} = 6$ $y_K = \frac{8}{2} = 4$

Donc $\boxed{K(6\,;4)}$

$BD = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2}$ $\qquad$ $AD = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2}$

$BD = \sqrt{(8 - 9)^2 + (5 - (-2))^2}$ $\qquad$ $AD = \sqrt{(4 - 9)^2 + (3 - (-2))^2}$

$BD = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 49}$ $\qquad$ $AD = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25}$

$BD = \boxed{\sqrt{50} \text{ unités de longueur}}$ $\qquad$ $AD = \boxed{\sqrt{50} \text{ unités de longueur}}$

$BD = AD$, donc le triangle ABD est bien isocèle en D.

d) On sait que le point C est le symétrique du point D par rapport au point K, donc K = milieu de $[CD]$.

$x_K = \dfrac{x_C + x_D}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_C + y_D}{2}$

$\times 2 \left(6 = \dfrac{x_C + 9}{2} \right) \times 2$ $\qquad$ $\times 2 \left(4 = \dfrac{y_C + (-2)}{2} \right) \times 2$

$12 = x_C + 9$ $\qquad$ $8 = y_C + (-2)$

$x_C = 12 - 9 = 3$ $\qquad$ $y_C = 8 + 2 = 10$ $\qquad$ $\boxed{\text{Donc } C(3\,;10).}$

e) On peut calculer les longueurs CA et CB, on trouve sans peine que : $CA = CB = \sqrt{50}$.

Par suite, grâce aux calculs effectués en 1c), on a : $CA = CB = BD = DA = \sqrt{50}$, et par suite, le quadrilatère $ACBD$ est un losange en tant que quadrilatère ayant ses quatre côtés de la même longueur.

f) On a appelé $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre AB. Si L est un point de $\mathcal{C}$, $KL = AK = KB$.

$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ $\qquad$ K = milieu de $[AB]$

$AB = \sqrt{(4 - 8)^2 + (3 - 5)^2}$ $\qquad$ donc $AK = KB = \sqrt{20} \div 2 = 4,47 \div 2 \approx \boxed{2,24 \text{ unités de longueur}}$

$AB = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4}$

$AB = \boxed{\sqrt{20} \approx 4,47}$

$KL = \sqrt{(x_K - x_L)^2 + (y_K - y_L)^2}$

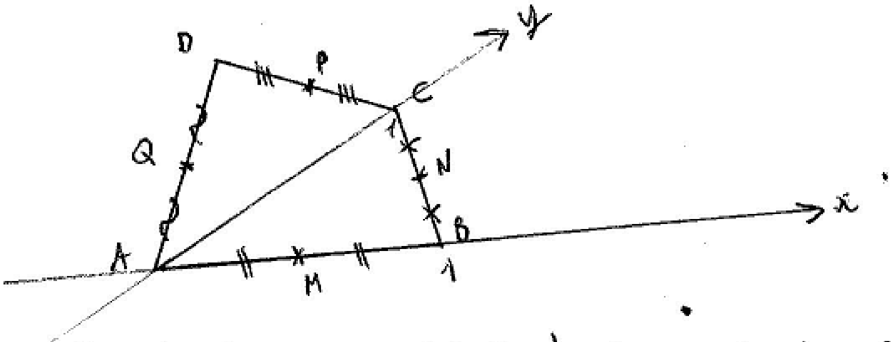
$KL = \sqrt{(6 - 7,6)^2 + (4 - 2,4)^2}$

$KL = \sqrt{2,56 + 2,56}$

$KL = \boxed{\sqrt{5,12} \approx 2,26 \text{ unités de longueur.}}$

Le point L n'appartient pas à $\mathcal{C}$ car $KL \approx 2,26$ et $AK \approx 2,24$ unités de longueur. $KL \neq AK$.

Exercice II



On se place dans le repère $(A ; B ; C)$: donc $A(0;0)$; $B(1;0)$ et $C(0;1)$
$D(a;b)$.

M = Milieu de $[AB]$, donc $M\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ $M\left(\frac{0+1}{2} ; \frac{0+0}{2}\right)$ $\boxed{M\left(\frac{1}{2} ; 0\right)}$.

N = Milieu de $[BC]$, donc $N\left(\frac{x_B+x_C}{2} ; \frac{y_B+y_C}{2}\right)$ $N\left(\frac{1+0}{2} ; \frac{0+1}{2}\right)$ $\boxed{N\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)}$

P = Milieu de $[CD]$, donc $P\left(\frac{x_C+x_D}{2} ; \frac{y_C+y_D}{2}\right)$ $P\left(\frac{0+a}{2} ; \frac{1+b}{2}\right)$ $\boxed{P\left(\frac{a}{2} ; \frac{b+1}{2}\right)}$

Q = Milieu de $[DA]$, donc $Q\left(\frac{x_A+x_D}{2} , \frac{y_A+y_D}{2}\right)$ $Q\left(\frac{0+a}{2} ; \frac{0+b}{2}\right)$ $\boxed{Q\left(\frac{a}{2} ; \frac{b}{2}\right)}$

1c) V = Milieu de $[MP]$, donc $V\left(\frac{x_M+x_P}{2} ; \frac{y_M+y_P}{2}\right)$ $V\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{a}{2}}{2} ; \frac{0+\frac{b+1}{2}}{2}\right)$

$V\left(\frac{\frac{a+1}{2}}{2} ; \frac{\frac{b+1}{2}}{2}\right)$ $\boxed{V\left(\frac{a+1}{4} ; \frac{b+1}{4}\right)}$

W = Milieu de $[NQ]$, donc $W\left(\frac{x_N+x_Q}{2} ; \frac{y_N+y_Q}{2}\right)$ $W\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{a}{2}}{2} ; \frac{\frac{1}{2}+\frac{b}{2}}{2}\right)$

$W\left(\frac{\frac{1+a}{2}}{2} ; \frac{\frac{1+b}{2}}{2}\right)$ $\boxed{W\left(\frac{a+1}{4} ; \frac{b+1}{4}\right)}$

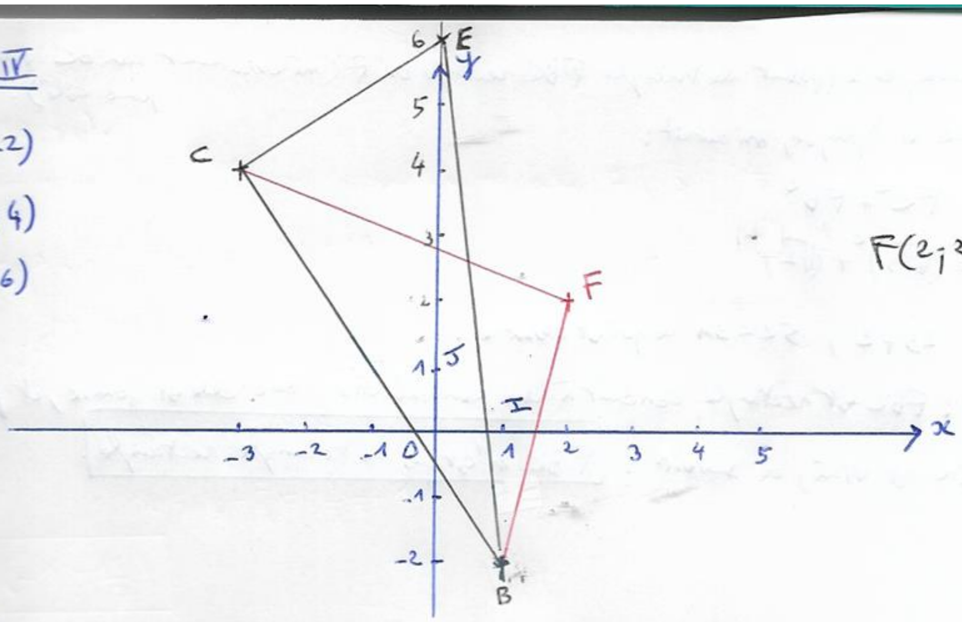
2d) V et W ont les mêmes coordonnées, donc sont confondus.
$[MP]$ et $[NQ]$ qui sont les diagonales du quadrilatère $MNPQ$ se coupent donc en leur milieu.
donc $\boxed{\text{MNPQ est un pgm}}$ en tant que quadrilatère ayant ses diagonales qui se coupent en leur milieu.
<u>Conclusion</u> : quelle que soit la nature du quadrilatère ABCD, <u>le quadrilatère MNPQ</u> "s'appuyant" sur les milieux des côtés de ABCD <u>est toujours un parallélogramme</u>.

Exercice IV

①
$B(1;-2)$

$C(-3;4)$

$E(0;6)$



$F(2;2)$

Il suffit, pour démontrer que les droites (BC) et (EC) sont perpendiculaires, de démontrer que le triangle BCE est rectangle en C :

Calculons au préalable la longueur des trois côtés du triangle BEC :

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

$BC = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-(-2))^2}$

$BC = \sqrt{(-4)^2 + 6^2}$

$BC = \sqrt{16+36}$

$BC = \sqrt{52}$

$EC = \sqrt{(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2}$

$EC = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-6)^2}$

$EC = \sqrt{9+4}$

$EC = \sqrt{13}$

$BE = \sqrt{(x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2}$

$BE = \sqrt{(0-1)^2 + (6-(-2))^2}$

$BE = \sqrt{(-1)^2 + 8^2}$

$BE = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$.

D'une part : $BE^2 = (\sqrt{65})^2 = 65$.

D'autre part : $BC^2 + CE^2 = (\sqrt{52})^2 + (\sqrt{13})^2 = 52+13 = 65$.

Ainsi on a : $BE^2 = BC^2 + CE^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BEC est rectangle en C et par suite, les droites (BC) et (EC) sont perpendiculaires.

② $F(2;2)$

Le graphique laisse à penser que FBC n'est pas rectangle !

Démontrons rigoureusement ce fait :

$BF = \sqrt{(x_F - x_B)^2 + (y_F - y_B)^2}$

$BF = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2}$

$BF = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$FC = \sqrt{(x_F - x_C)^2 + (y_F - y_C)^2}$

$FC = \sqrt{(2-(-3))^2 + (2-4)^2}$

$FC = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$.

et on a vu (q.1) que $BC = \sqrt{52}$.

Raisonnons par l'absurde, en supposant le triangle FBC rectangle en F (nécessairement car BC est le plus grand côté).

Alors d'après le théorème de Pythagore, on aurait :

$$BC^2 = FC^2 + FB^2$$

$$(\sqrt{52})^2 = (\sqrt{29})^2 + (\sqrt{2})^2$$

Donc $52 = 29 + 2$, $52 = 31$ ce qui est absurde.

Ainsi, l'hypothèse : FBC est rectangle conduit à une contradiction, donc elle est fausse, et par suite, son contraire est vrai, à savoir : $\boxed{\text{FBC n'est pas un triangle rectangle}}$.

Exercice V

1) $O(0;0)$; $I(1;0)$; $J(1;0)$; $A(1;1)$; $K(\frac{1}{2};0)$; $L(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

1b) M est le milieu de [JL], donc $M(x_M;y_M)$ avec : $\begin{cases} x_M = \frac{x_J+x_L}{2} = \frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \\ y_M = \frac{y_J+y_L}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4} \end{cases}$.

Donc $\underline{M(\frac{1}{4};\frac{3}{4})}$.

2) On va prouver que AMK est un triangle rectangle et isocèle en M :

$$MA = \sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2} = \sqrt{(1-\frac{1}{4})^2+(1-\frac{3}{4})^2} = \sqrt{(\frac{3}{4})^2+(\frac{1}{4})^2} = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \sqrt{\frac{5}{8}}$$

Défi

Soit (Δ) la tangente commune en C aux deux cercles tracés : on a alors : $(\Delta)\perp(OC)$ et $(\Delta)\perp(CK)$ par définition même d'une tangente à un cercle.
Or si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles.
Donc $(OC) /\!/ (CK)$ et comme ces deux droites ont C en commun, il en résulte qu'elles sont confondues, donc O, C et K sont situés sur la même droite (OC), donc O, C et K sont alignés.
2) Considérons le point H comme défini dans l'indication : le triangle OHK ainsi obtenu est rectangle en K.
D'après le théorème de Pythagore appliqué à ce dernier, on a : $OH^2+HK^2 = OK^2$. (*)
Or, $OH = AB$ car le quadrilatère $OABH$ est un rectangle (3 angles droits).
Et $HK = R - r$ et $OK = R + r$ car O, C et K sont ainsi alignés et $OC = r$ et $CK = R$.
D'où grâce à (*) en tenant compte des précédents résultats : $AB^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2$.
$AB^2 + R^2 - 2Rr + r^2 = R^2 + 2Rr + r^2$.
$AB^2 = 2Rr + 2Rr = 4Rr$.

Donc $AB = \sqrt{4Rr} = \sqrt{4} \times \sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rr}$.