**Exercice I**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

a) $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-1} = \dfrac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\left(3-\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n}}$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$

et par somme et quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}}$

b) $u_n = \dfrac{(-1)^n + 3\sin(n)}{n^2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, donc $-3 \leqslant 3\sin(n) \leqslant 3$, donc $-4 \leqslant (-1)^n + 3\sin(n) \leqslant 4$
(on a additionné membre à membre deux inégalités de même sens !!).

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{4}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{4}{n^2}$ (car $n^2 > 0$, donc sens de l'inégalité inchangé en divisant par $n^2$).

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-4}{n^2} = 0$.

Par suite, les trois points soulignés rendent licite d'utiliser le théorème des gendarmes, qui permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**Exercice II**

## 43 p 185

a) Il semblerait que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \in \{-1;1\}$, donc $(-1)^n \geq -1$, donc $4\times(-1)^n \geq 4\times(-1)$ car $4>0$, donc $\underbrace{n+4\times(-1)^n}_{t_n} \geq n-4$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \geq n-4$

c) Grâce à la question b), $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \geq n-4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-4) = +\infty$, donc par th. de comparaison de limite :

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty}$.

d) C'est faux ! Contre-exemple : la suite $(t_n)$ diverge vers $+\infty$ mais $(t_n)$ n'est pas croissante à partir d'un certain rang :

En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} - t_n = n+1+4(-1)^{n+1} - (n+4(-1)^n) = \cancel{n}+1+4(-1)^{n+1} - \cancel{n} - 4(-1)^n = 1+4(-1)^{n+1} + 4(-1)^{n+1}$

$= 1+2\times4\times(-1)^{n+1}$

$$t_{n+1} - t_n = 1 + 8(-1)^{n+1} \quad \text{avec } 8(-1)^{n+1} \in \{-8;8\}$$

Donc $t_{n+1} - t_n$ vaut alternativement 9 ou $-7$ donc n'est pas de signe constant positif !

Ainsi, $(t_n)$ n'est ni croissante, ni décroissante !

## 45 p 185

$\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n = \dfrac{1}{n+5}$

a) Si $n \geq 1$, alors $n+5 \geq n$, donc $\dfrac{1}{n+5} \leq \dfrac{1}{n}$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$.

de plus, $e_n \geq 0$ car $1>0$ et $n+5>0$ (vu que $n\geq 1$).

Donc : Pour tout entier $n \geq 1$, $\boxed{0 \leq e_n \leq \frac{1}{n}}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $0 \leq e_n \leq \dfrac{1}{n}$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0}$.

## 48 p 185

$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = -4e^{2n+3}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $2n+3 \geq n$, donc $e^{2n+3} \geq e^n$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

donc $-4e^{2n+3} \leq -4e^n$ car $-4<0$ ; donc $\boxed{c_n \leq -4e^n}$

Or $e>1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$, donc comme $-4<0$, par limite de produit, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} -4e^n = -\infty}$

$e \approx 2{,}72$

D'après le th. de comparaison des limites on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty}$

58 p 186 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n^2 + 4n + 2$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (4n+2) = +\infty$, donc on est en présence d'une F. I (par la somme).

Or, $u_n = n(-n+4) + 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ ; $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n+4) = -\infty$, donc par limite de produit :

$$\lim_{n \to +\infty} n(-n+4) = -\infty$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2 = 2$ , donc par limite de somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} n(-n+4) + 2 = -\infty$

Bref, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty.}$

94p191

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n = e^{\frac{8}{n}}$.

a) $f(x) = e^x - 4x - 1$

$f$ est dérivable sur $[0;1]$ et $f'(x) = e^x - 4$.

Or $0 \leq x \leq 1$ ; donc $e^0 \leq e^x \leq e^1$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0;1]$).

donc $e^x - 4 \leq e - 4$ avec $e \simeq 2{,}72$ donc $e - 4 \simeq -1{,}28$.
donc $e - 4 \leq 0$.

Ainsi, $\forall x \in [0;1], \quad e^x - 4 \leq 0$

$\forall x \in [0;1], \quad f'(x) \leq 0$, donc $f$ décroit sur $[0;1]$.

b) $f$ décroit sur $[0;1]$, donc $\forall x \in [0;1], \quad f(0) \geq f(x) \geq f(1)$

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(0)$ | $f(1)$ |

Or $f(0) = e^0 - 4\times 0 - 1 = 0$
$(e^0 = 1)$

$\forall x \in [0;1]$, $f(x) \leq f(0)$ et $f(0) = 0$, donc $f(x) \leq 0$ donc $e^x - 4x - 1 \leq 0$, donc $e^x \leq 1 + 4x$

Enfin, si $0 \leq x \leq 1$, $e^0 \leq e^x$ car exp. croît sur $\mathbb{R}$, donc $1 \leq e^x$

En outre, $\boxed{\forall x \in [0;1], \; 1 \leq e^x \leq 1 + 4x}$

c) $n \geq 8$, donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{8}$ par décroissance de la fonction inverse sur $[8;+\infty[$.

donc $\frac{8}{n} \leq \frac{8}{8}$ car $8 > 0$, donc $\frac{8}{n} \leq 1$. et $\frac{8}{n} \geq 0$ (règle des signes).

Ainsi, si $n \geq 8$, alors $0 \leq \frac{8}{n} \leq 1$.

Appliquons alors la question b) avec $x = \frac{8}{n}$ ; $(\in [0;1])$ :

$$1 \leq e^{\frac{8}{n}} \leq 1 + 4 \times \frac{8}{n}$$

$\boxed{\text{Pour } n \geq 8, \quad 1 \leq u_n \leq 1 + \frac{32}{n}}$

d) Or $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par produit et somme, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{32}{n}\right) = 1}$

De plus, pour $n \geq 8$ (q. c) on a l'encadrement : $\boxed{1 \leq u_n \leq 1 + \frac{32}{n}}$.

Donc d'après le th. des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$

**Exercice III**

1. **a.** Retrancher 2 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{2}{100} = 1 - 0,02 = 0,98$.

D'une année sur l'autre on multiplie le nombre de panneaux par 0,98 puis on augment de nombre de panneaux de 250.

**b.** Avec la calculatrice il suffit de taper 10 560 Entrée puis $\times 0,98 + 50$.

Entrée donne $u_1 \approx 10599$, les appuis successifs de Entrée donnent $u_2$, $u_3$, etc.

On obtient $u_{68} \approx 12009$.

le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de 68 ans soit en 2088.

**c.** Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n= 0
while u ⩽ 12000 :
    u = 0,98 * u + 250
    n = n + 1
```

2. *Initialisation* : $u_0 = 10560 \leqslant 12500$ : la proposition est vraie au rang 0.

*Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 12500$ soit en multipliant par 0,98 :

$0,98u_n \leqslant 0,98 \times 12500$ et en ajoutant 250 à chaque membre :

$0,98u_n + 250 \leqslant 0,98 \times 12500 + 250$ ou $u_{n+1} \leqslant 12250 + 250$ et finalement $u_{n+1} \leqslant 12500$ : la proposition est vraie au r ng $n+1$.

La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang $n+1$ : d'après le principe de la récurrence la proposition $u_n \leqslant 12500$ est vraie pur tout naturel $n \in \mathbb{N}$.

3. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,98u_n + 250 - u_n = 250 - 0,02u_n$.

Or d'après le résultat précédent :

$u_n \leqslant 12500 \Rightarrow 0,02u_n \leqslant 0,02 \times 12500$ ou encore $0,02u_n \leqslant 250$ ou en ajoutant à chaque membre $-0,02u_n$ :

$0 \leqslant 250 - 0,02u_n$ ; on a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui signifie que la suite $(u_n)$ est croissante.

4. La suite $(u_n)$ est croissante et majorée par 12 500 : elle est donc convergente vers une limite $\ell$, telle que $\ell \leqslant 2500$.

5. **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 12500 = 0,98u_n + 250 - 12500$, soit $v_{n+1} = 0,98u_n - 12250 = 0,98u_n - 12250 \times \frac{0,98}{0,98} = 0,98u_n - 12500 \times 0,98 = 0,98(u_n - 12500)$ soit enfin $v_{n+1} = 0,98v_n$ : cette relation vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,98 de premier terme $v_0 = u_0 - 12500 = 10560 - 12500 = -1940$.

**b.** On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,98^n$, soit $v_n = -1940 \times 0,98^n$.

**c.** Pour tout entier naturel $n$, $v_n = u_n - 12500 \iff u_n = v_n + 12500 = 12500 - 1940 \times 0,98^n$.

**d.** Comme $0 < 0,98 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,98^n = 0$, donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 12500$

Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.