Seconde 4 **Corrigé du DM14** **Mai 2023**

Exercice I

Nous observons tout d'abord que les droites(d) et (δ) sont sécantes. Déterminons les coordonnées du point A d'intersection de ces deux droites, en résolvant le système

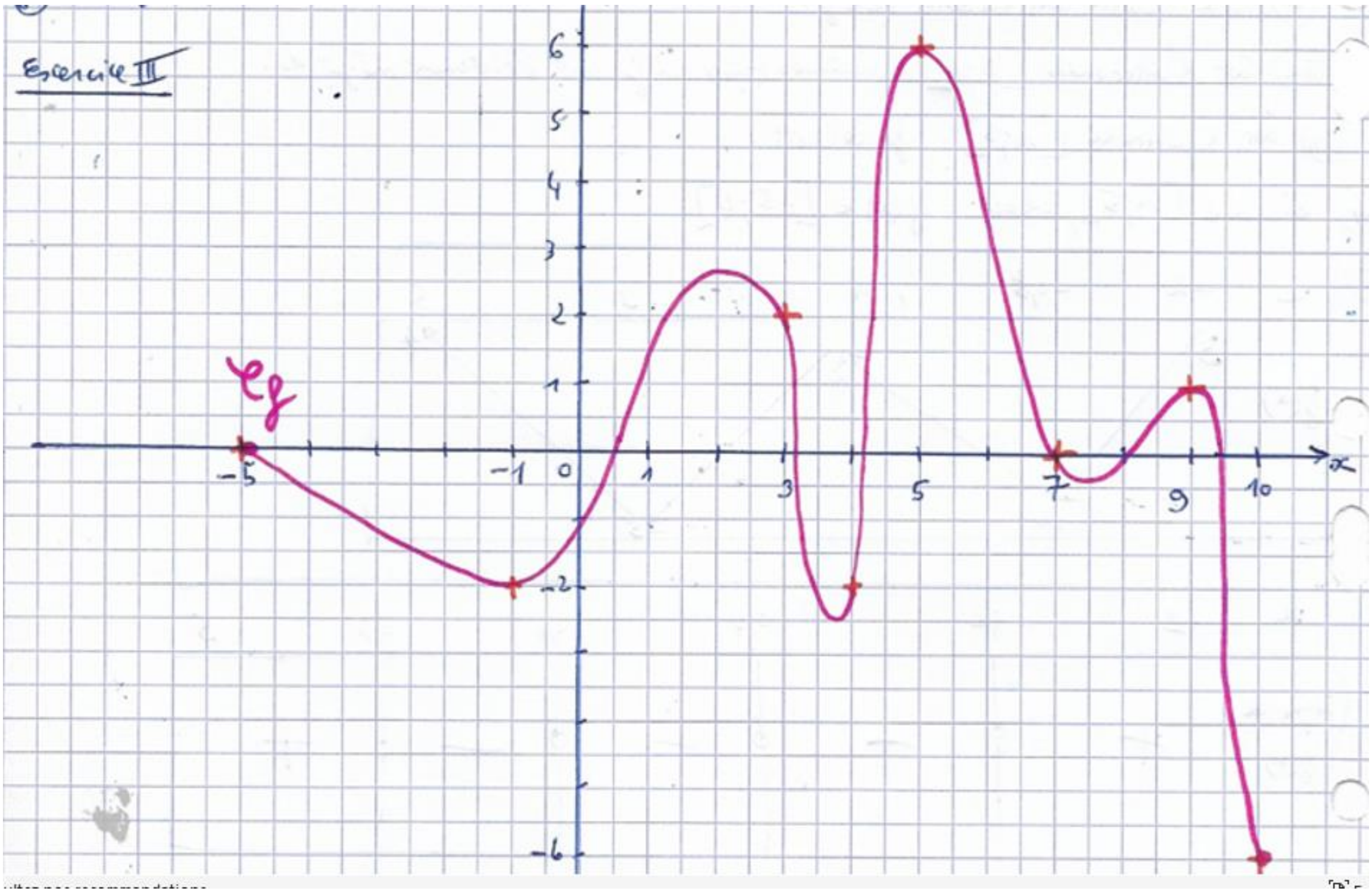
$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 5 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -5 \end{cases}.$$

Nous en concluons que ces trois droites sont concourantes en $A(-5,\ -5)$ si et seulement si

$$-5 = -5m - 3 \Leftrightarrow m = \frac{2}{5}.$$

On peut contrôler graphiquement pour vérifier.

Exercice II



Le tableau de variation est immédiat.

Exercice III

x	-3		-1		2		5		7
Variation de h	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

① $h(0) < h(1)$ est une affirmation FAUSSE !
En effet, h décroît sur $[-1;2]$, donc h décroît aussi sur $[0;1]$.
Or $0 < 1$ et h décroît sur $[0;1]$, donc $h(0) > h(1)$.

② $h(4) > h(6)$: le tableau donné ne permet pas de conclure !
$h(4) \in [-4;4]$ et $h(6) \in [0;4]$: impossible de comparer $h(4)$ et $h(6)$.

③ $h(-2) < h(2)$: Faux car $h(2) = -4$ et $h(-2) \in [-2;-1]$ car $-3 < -2 < -1$ donc $h(-3) < h(-2) < h(-1)$ car h croît sur $[-3;-1]$.
donc $h(-2) \geqslant -2$ et par suite, $h(-2) \neq -4$.

④ $h(0{,}5) = h(1{,}5)$: Pas assez de renseignements ds le tableau pour pouvoir l'affirmer !!

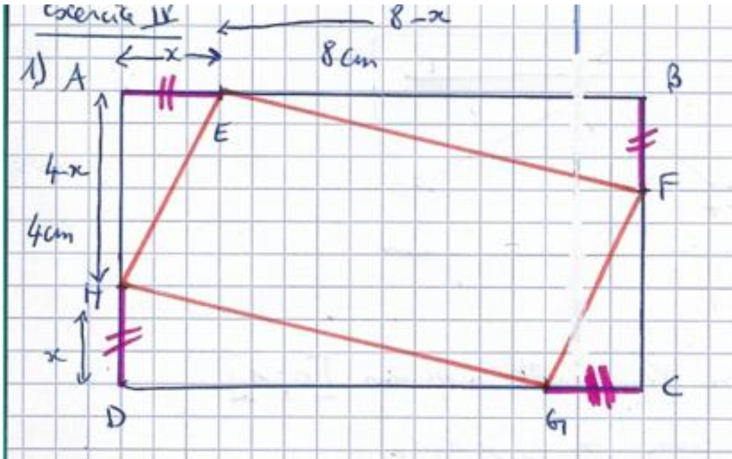
⑤ Faux : le maximum de h sur $[-3;7]$ est égal à 4 (et ce dernier est atteint lorsque $x = 5$)

⑥ Vrai !

Exercice IV

exercice IV

1)



$AE = BF = CG = DH = x$.

2a) On doit avoir : $0 \leqslant x \leqslant 4$ et $0 \leqslant x \leqslant 8$
donc $0 \leqslant x \leqslant 4$: $\underline{x \in [0;4]}$.
On pose $\underline{I = [0;4]}$.

2b) $f(x) = \text{aire}(EFGH) = \text{aire}(ABCD) - \big(\text{aire}(AEH) + \text{aire}(EBF) + \text{aire}(FCG) + \text{aire}(DHG)\big)$

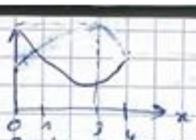
Les triangles AEH et FCG sont identiques et $\text{aire}(AEH) = \text{aire}(FCG) = \dfrac{x(4-x)}{2}$

Les triangles EBF et DHG sont identiques et $\text{aire}(EBF) = \text{aire}(DHG) = \dfrac{x(8-x)}{2}$

$f(x) = 8 \times 4 - \left(2 \times \dfrac{x(4-x)}{2} + 2 \times \dfrac{x(8-x)}{2}\right) = 32 - \big(x(4-x) + x(8-x)\big)$

$\boxed{f(x)} = 32 - (4x - x^2 + 8x - x^2) = 32 - (-2x^2 + 12x) = \boxed{2x^2 - 12x + 32}$ (cm^2).

c) Sur $[0;4]$, grâce à une calculatrice :



Conjecture : le minimum de f sur $[0;4]$ semble être égal à 14 et atteint lorsque $x = 3$.

d) Pour tout réel x appartenant à $[0;4]$:

$$f(x) - f(3) = 2x^2 - 12x + 32 - 14 = 2x^2 - 12x + 18 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2(x-3)^2$$

IR n°2.

Or, $(x-3)^2 \geqslant 0$ et $2 > 0$, donc, $2(x-3)^2 \geqslant 0$.

Par suite, pour tout réel x appartenant à $[0;4]$, $f(x) - f(3) \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant f(3)$.

f admet donc un minimum sur $[0;4]$ atteint lorsque $x = 3$ et égal à $f(3) = 14$.

Lorsque $x = 3$ cm, l'aire de EFGH est minimale, et égale à 14 cm^2.

Exercice V

a) 

P croît sur $[1;4]$:

x	1	4
$P(x)$	2π ↗	8π

Rappel : $P(x) = 2\pi x$

b) a décroît sur $[1;4]$:

x	1	4
$a(x)$	24π ↘	9π

$a(1) = \pi \times 5^2 - \pi \times 1^2 = \pi(25-1) = 24\pi$

$a(4) = \pi \times 5^2 - \pi \times 4^2 = 25\pi - 16\pi = 9\pi$

Pour la question a), on a une fonction linéaire de coefficient $2\pi > 0$, *donc la fonction p croit sur* $[0\,;4]$.

Exercice VI

1) facile ---- : le maximum de f sur $\mathbb{R}$ semble être égal à $\frac{1}{2}$.

2) Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Donc $f(x) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x}{2(x^2+1)} - \dfrac{(x^2+1)}{2(x^2+1)} = \dfrac{2x-(x^2+1)}{2(x^2+1)} = \dfrac{-x^2+2x-1}{2(x^2+1)}$

$f(x) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-(x^2-2x+1)}{2(x^2+1)} = \dfrac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)}$.

IR2

Or pour tout réel x, $(x-1)^2 \geq 0$; $2(x^2+1) > 0$ donc $\dfrac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)} \leq 0$.

Par suite, pour tout réel x, $f(x) - \dfrac{1}{2} \leq 0$.

Comme $f(1) = \dfrac{1}{2}$, on a : $f(x) - f(1) \leq 0$, donc $f(x) \leq f(1)$: f admet donc pour maximum sur $\mathbb{R}$ la valeur $\dfrac{1}{2}$ et ce maximum est atteint lorsque $x = 1$.

3) Pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$, et $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x}{x^2+1} = -f(x)$: f est donc impaire sur $\mathbb{R}$.

Grâce à q.2 : pour tout réel x, $f(x) \leq f(1)$, donc $-f(x) \geq -f(1)$.

Or f est impaire sur $\mathbb{R}$, donc $-f(x) = f(-x)$ et $-f(1) = f(-1)$:

Donc pour tout réel x, $f(-x) \geq f(-1)$, et en renommant la variable $X = -x$, on a : pour tout réel X, $f(X) \geq f(-1)$: f admet donc pour minimum sur $\mathbb{R}$ la valeur $f(-1) = -f(1) = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice VII

1) $\mathcal{D}_f = [-2 ; +\infty[$ car $f(x)$ est calculable si et seulement si $2x+4 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq -2$.

2) Evident : elle passe par $A(0 ; -2)$ et $B(2 ; 0)$.

3) Graphiquement : $f(x) = x-2$ a pour unique solution : $x = 6$

Par le calcul : $f(x) = x-2 \iff \sqrt{2x+4} = x-2 \iff \begin{cases} 2x+4 = (x-2)^2 \\ x-2 \geq 0 \text{ (et } 2x+4 \geq 0 \text{ vérifiée si } x \geq 2\text{.)} \end{cases}$

$$f(x) = x-2 \iff \begin{cases} x^2-4x+4 = 2x+4 \\ x \geq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-6x=0 \\ x \geq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-6)=0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ \text{et} \\ x \geq 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-6=0 \\ \text{et} \\ x \geq 2 \end{cases}$$

→ $x = 6$ est une solution acceptable car $6 \geq 2$ est vraie.

à rejeter car $0 \geq 2$ est faux

donc $\mathcal{S} = \{6\}$.

Remarque : la résolution de la question 3) se base sur le point important suivant : deux nombres positifs qui ont le même carré sont égaux.

Autre rédaction possible :

Si f(x) = x -2, alors $(f(x))^2 = (x-2)^2$ car si deux nombres sont égaux alors ils ont le même carré. De là on aboutit sans peine à x = 0 ou x = 6.

Attention, il faut ici faire la réciproque : 0 n'est pas solution de cette équation car $\sqrt{2 \times 0 + 4} = 2 \; et \; 2 - 2 = 0, et \; 2 \neq 0.$

6 est solution de l'équation proposée car : $\sqrt{2 \times 6 + 4} = 4 \; et \; 6 - 2 = 4 \; et \; 4 = 4.$

Même conclusion : cette équation a pour unique solution le réel 6.

Exercice VIII

1) $f(0) = 1$; $f(-1) = -1$; $f(-2) = 1$.

2) $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$ et d'après 1), $f(0) = 1$.

donc $\boxed{c=1}$ et $\boxed{f(x) = ax^2+bx+1.}$

Or $f(-1) = -1 \iff a \times (-1)^2 + b \times (-1) + 1 = -1 \iff a - b + 1 = -1 \iff a - b = -2$

$f(-2) = 1 \iff a \times (-2)^2 + b \times (-2) + 1 = 1 \iff 4a - 2b + 1 = 1 \iff 4a - 2b = 0$

D'où le système : $\begin{cases} a-b=-2 \\ 4a-2b=0 \end{cases} \underset{L_2 \div 2}{\iff} \begin{cases} a-b=-2 \\ 2a-b=0 \end{cases} \underset{L_2 - L_1 \to}{\iff} \begin{cases} a-b=-2 \\ a=2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a=2 \\ b=a+2=2+2=4. \end{cases}$ $\mathcal{S} = \{(2 ; 4)\}$.

donc $\boxed{f(x) = 2x^2+4x+1}$

Exercice IX

$f(x+y)=f(x)f(y)$ *pour tous entiers* x *et* y, *et* $f(1) = \frac{1}{2}$.

En faisant $x = y = 0$, il vient : $f(0+0) = f(0)^2$ donc $f(0) = f(0)^2$, donc $f(0)(1 - f(0)) = 0$.

Par suite, $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Si $f(0) = 0$, alors, comme pour tout réel x, $x = x + 0$, on aurait : $f(x+0) = f(x) \times f(0)$, et donc, pour tout réel x, $f(x) = 0$. Or par donnée, $f(1) = \frac{1}{2}$, donc f ne peut pas être tout le temps nulle.

Par suite, $f(0) = 1$.

Enfin, $f(2) = f(1 + 1) = f(1)f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Par suite, $f(0) + f(1) + f(2) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.