Terminale Maths Groupe 2 **Corrigé du DM 12** **Mars 2023**

Exercice I

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS.

On a DC = 6, DA = DH = 4.

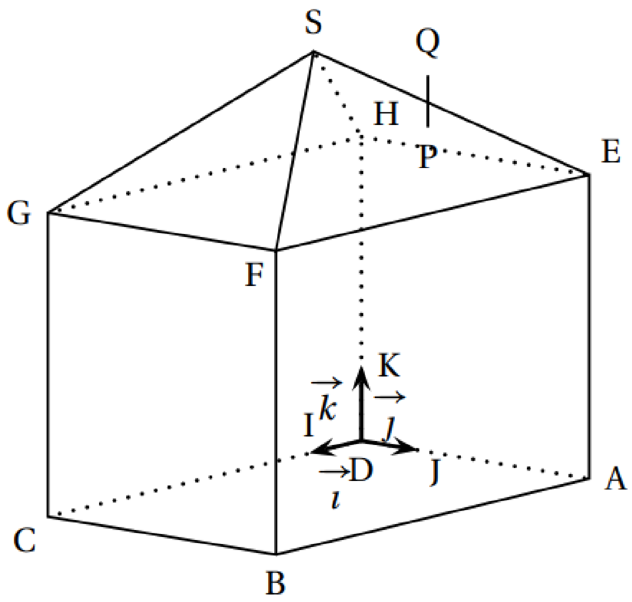
Soit les points I, J et K tels que

$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}$.

On note $\vec{\imath} = \overrightarrow{DI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{DJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{DK}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(D\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On admet que le point S a pour coordonnées (3; 2; 6).



1. B(6; 4; 0), E(0; 4; 4), F(6; 4; 4), G(6; 0; 4).

2. On a $\mathcal{A}(\text{EFGH}) = 6 \times 4 = 24$.

   La hauteur de la pyramide est égale à $6 - 4 = 2$, donc :

   $V(\text{EFGHS}) = \frac{1}{3} \times 24 \times 2 = 16$.

   D'autre part $V(\text{ABCDEFGH}) = 6 \times 4 \times 4 = 96$.

   Le volume de la maison est donc égal à $16 + 96 = 112$.

   Or $\frac{V(\text{EFGHS})}{V(\text{maison})} = \frac{16}{112}\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

3. **a.** On a $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ES}\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{EF} \cdot \vec{n} = 6 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$ et

   $\overrightarrow{ES} \cdot \vec{n} = 3 \times 0 - 2 \times 1 + 2 \times 1 = 0$.

   Le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan (EFS) est donc normal à ce plan.

   b. Le résultat précédent montre que :

   $M(x\,;\ y\,;\ z) \in (\text{EFS}) \iff 0x + 1y + 1z = d, \quad d \in \mathbb{R}$.

   Or, par exemple $E(0; 4; 4) \in (\text{EFS}) \iff 0 + 4 + 4 = d \iff d = 8$.

   On a donc $M(x\,;\ y\,;\ z) \in (\text{EFS}) \iff y + z = 8$.

4. **a.** On a $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{PQ}) \iff \overrightarrow{\text{Q}M} = t\,\overrightarrow{k},\quad (t\in\mathbb{R}) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-2 & = & 0t\\ y-3 & = & 0t\\ z-5,5 & = & 1t\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2\\ y & = & 3\\ z & = & 5,5+t\end{array}\right.\quad,\quad (t\in\mathbb{R}).$

b. Les coordonnées du point P vérifient les équations paramétriques de la droite (PQ) et du plan (EFS), donc du système :

$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2\\ y & = & 3\\ z & = & 5,5+t\\ y+z & = & 8\end{array}\right. \Rightarrow 3+5,5+t=8 \iff t=-0,5.$

Conclusion : P(2 ; 3 ; 5).

c. On a $\text{PQ}^2 = (2-2)^2+(3-3)^2+(5,5-5)^2 = 0,25$, donc $\text{PQ} = 0,5$.

5. Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\delta}\begin{pmatrix}6\\-4\\4\end{pmatrix}$ et la droite (PQ) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$:

ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

Elles sont sécantes s'il existe un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ dont les coordonnées vérifient les équations des deux droites soit le système :

$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2\\ y & = & 3\\ z & = & 5,5+t\\ x & = & -4+6s\\ y & = & 7-4s\\ z & = & 2+4s\end{array}\right.$

On en déduit (équations 1 et 4) que $2=-4+6s \iff 6=6s \iff s=1$ et (équations 3 et 6) que $5,5+t=2+4 \iff t=0,5$.

Il existe donc un point commun aux deux droites de coordonnées (2 ; 3 ; 4)

Reprenons les équations paramétriques de la droite (PQ) : $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{PQ}) \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2\\ y & = & 3\\ z & = & 5,5+t\end{array}\right.\quad,\quad (t\in\mathbb{R})$

L'abscisse et l'ordonnée de tous les points de cette droite sont fixes, seule la cote varie de 5 pour P (correspondant à $t=-0,5$ à 5,5 pour Q (correspondant à $t=0$) ; autrement dit les points du segment vérifient le système :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in[\text{PQ}] \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2\\ y & = & 3\\ z & = & 5,5+t\end{array}\right.\quad,\quad (-0,5\leqslant t\leqslant 0).$$

Le point commun aux deux droites correspond lui à $t=0,5$, donc n'appartient pas au segment [PQ] : autrement dit l'oiseau ne va pas percuter l'antenne représentée par le segment [PQ].

Exercice II

Réponse d), facile, dériver la réponse d) et on a F(0) =1.

Exercice III

1a)

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme et composé de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$).

$F(x) = x - \ln(1+e^x) = x - \ln(u(x))$ avec : $\begin{cases} u(x) = 1+e^x \\ u'(x) = e^x \end{cases}$

$F'(x) = 1 - \dfrac{u'(x)}{u(x)} = 1 - \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1+e^x}{1+e^x} - \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$F'(x) = \dfrac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = \dfrac{1}{1+e^x} = f(x).$

Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) $x>1$ et $F(x) = \ln(\ln(x)) = \ln(v(x))$ où $\begin{cases} v(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$.

$F'(x) = \dfrac{v'(x)}{v(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)} = f(x)$

Donc F est une primitive de f sur $]1;+\infty[$.

2) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+2}$. Posons : $u(x) = e^x + 1$, donc $u'(x) = e^x$.

f est de la forme : $\dfrac{u'}{u}$

Donc les primitives de *f* sont les fonctions *F* définies sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = \ln(|u(x)| + k = \ln(e^x+1) + k$, car ici, $e^x+1 > 0$ pour tout réel *x*, par positivité des valeurs prises par la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ (où $k \in \mathbb{R}$).

Enfin, traduisons la condition F(0) = 1 : $\ln(e^0+1) + k = 1$, donc $k = 1 - \ln(2)$.

Par suite, pour tout réel *x*, on a : $F(x) = \ln(e^x+1) + 1 - \ln(2)$.

3)

$f(x) = 2e^{-x} + \pi x^3 - 0{,}2x^2 + \frac{2}{7}x - 11.$

$F(x) = -2e^{-x} + \dfrac{\pi x^4}{4} - \dfrac{0{,}2x^3}{3} + \dfrac{2}{7} \times \dfrac{x^2}{2} - 11x$

$F(x) = -2e^{-x} + \dfrac{\pi x^4}{4} - \dfrac{x^3}{15} + \dfrac{x^2}{7} - 11x$ car $\dfrac{0{,}2}{3} = \dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$

g(x) $= 5\sin(x) + 4e^{\frac{2x}{7}} - 4e^{-5x}$ se primitive sans difficultés d'après le cours en :

$G(x) = -5\cos(x) + 4 \times \dfrac{e^{\frac{2}{7}x}}{\frac{2}{7}} - 4 \times \dfrac{e^{-5x}}{-5} = -5\cos(x) + 14e^{\frac{2}{7}x} + \frac{4}{5}e^{-5x}.$

4)

56 **a)** $2+\dfrac{e^x}{e^x+4}=\dfrac{2(e^x+4)}{e^x+4}+\dfrac{e^x}{e^x+4}$.

Donc $2+\dfrac{e^x}{e^x+4}=\dfrac{3e^x+8}{e^x+4}$.

Ainsi pour tout x, $k(x)=2+\dfrac{e^x}{e^x+4}$.

b) Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de k est définie par $K(x)=2x+\ln(e^x+4)$.

L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction k est donc constitué des fonctions $x\mapsto 2x+\ln(e^x+4)+C$ définies sur $\mathbb{R}$ où C est une constante réelle.

K est une primitive sur $\mathbb{R}$ de k. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $K(x)=2x+\ln(e^x+4)+C$.

Or $K(0)=0$, ainsi $\ln(5)+C=0$ soit $C=-\ln(5)$.

Donc la primitive sur $\mathbb{R}$ de k qui vérifie $K(0)=0$ est définie par $K(x)=2x+\ln(e^x+4)-\ln(5)$.

41b)

b) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x)=-2\left(\dfrac{3}{2}x^2-e^x\right)=-3x^2+2e^x$.

42b)

b) Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f est définie par $F(x)=-\dfrac{2}{x}+4x$.

45 **a)** On pose $u(x) = x^2 - 2x + 4$, alors $u'(x) = 2x - 2$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{2}u'(x)u^3(x)$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3+1}u^{3+1}(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 2x + 4)^4$.

b) On pose $u(x) = e^{3x} + 1$, alors $u'(x) = 3e^{3x}$.

Ainsi, pour tout réel x, $g(x) = \frac{1}{3}u'(x)u^4(x)$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est définie par $G(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4+1}u^{4+1}(x) = \frac{1}{15}(e^{3x} + 1)^5$.

53 Une primitive sur $]1; +\infty[$ de f est définie par $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln(x-1)$.

L'ensemble des primitives sur $]1; +\infty[$ de la fonction f est donc constitué des fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln(x-1) + C$ définies sur $]1; +\infty[$ où C est une constante réelle.

F est une primitive sur $]1; +\infty[$ de f donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel $x > 1$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln(x-1) + C$.

Or $F(2) = 0$, ainsi $6 + C = 0$ soit $C = -6$.

Donc la primitive sur $]1; +\infty[$ de f qui s'annule en 2 est définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln(x-1) - 6$.

48b)

b) On pose $u(x) = 5x$, alors $u'(x) = 5$.

Ainsi, pour tout réel x, $g(x) = \frac{3}{5} \times u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est définie par $G(x) = \frac{3}{5}\mathrm{e}^{u(x)} = \frac{3}{5}\mathrm{e}^{5x}$.

b) On pose $u(x) = x^2 + 2x$, alors $u'(x) = 2x + 2$.

Ainsi, pour tout réel x, $h(x) = 2 \times u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de h est définie par $H(x) = 2\mathrm{e}^{u(x)} = 2\mathrm{e}^{x^2+2x}$.

50 **a)** On pose $u(x) = x^2 + 1$, alors $u'(x) = 2x$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$.

b) On pose $u(x) = \mathrm{e}^{3x} + 4$, alors $u'(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$.

Ainsi, pour tout réel x, $g(x) = 3 \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est définie par $G(x) = 3 \times 2\sqrt{u(x)} = 6\sqrt{\mathrm{e}^{3x} + 4}$

5)

a) $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ car quotient de deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\boxed{f'(x)} = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)\times\cos(x) - \sin(x)\times(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \boxed{\frac{1}{\cos^2(x)}}$$

$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

$$\boxed{f'(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = \boxed{1+\tan^2(x)}$$

b) $g(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = f'(x)$

donc $G(x) = f(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$ sont les primitives de g sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

$G(x) = \tan(x) + k$ avec : $G(0) = 0 \iff \tan(0) + k = 0 \iff \frac{\sin(0)}{\cos(0)} + k = 0$

$\iff k = 0$ car $\sin(0) = 0$.

donc $G(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est l'unique primitive de g sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en 0.

c) $h(x) = \tan^2(x) = 1 + \tan^2(x) - 1$ (astuce Belge)

$h(x) = f'(x) - 1$ (q.a)

donc la fonction H définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $H(x) = f(x) - x + k = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - x + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Exercice IV

C_1 est celle de f', C_2 est celle de f et C_3 est celle de F : pour le voir, on peut raisonner par élimination…..

Si C1 était la courbe de f, aucune (en vertu du principe de Lagrange) des deux courbes restantes ne respecterait sur des intervalles adéquats le signe de la dérivée de f.

Idem, C3 ne peut pas être celle de f.