Terminale Maths Groupe 2 **Corrigé du DM 10** **Février 2023**

Exercice I

1) a) $\underbrace{\ln(x+1)}_{\text{existe ssi } x+1>0,\text{ car } \ln \text{ définie sur }]0;+\infty[} \leqslant 0 \iff \ln(x+1) \leqslant \ln(1) \iff \begin{cases} x+1 \leqslant 1 \\ \text{et} \\ x+1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leqslant 0. \\ \text{et} \\ x>-1. \end{cases}$ $\boxed{S =]-1;0]}$.

b) $4e^{3x-1} = 1 \iff e^{3x-1} = \frac{1}{4} \iff \ln(e^{3x-1}) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \iff 3x-1 = -\ln 4 \iff x = \frac{1-\ln 4}{3}$. $\boxed{S = \left\{\frac{1-\ln 4}{3}\right\}}$

c) $\dfrac{1}{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+1} \geqslant 0{,}999 \iff \dfrac{1}{0{,}999} \geqslant 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+1$ car $2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+1>0$.

$\iff 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant \frac{1}{0{,}999}-1$

$\iff \left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0{,}999}-1\right)$ et $\frac{1}{0{,}999}-1 = \frac{1-0{,}999}{0{,}999} = \frac{0{,}001}{0{,}999} = \frac{1}{999}$.

$\iff \left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant \frac{1}{2}\times\frac{1}{999}$

$\iff \left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant \frac{1}{1998}$

$\iff \ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{1998}\right)$ car $\underline{\ln \text{ croît sur }]0;+\infty[}$

$\iff n\ln\left(\frac{1}{4}\right) \leqslant -\ln(1998)$

$\iff -n\ln(4) \leqslant -\ln(1998)$

$\iff n \geqslant \dfrac{-\ln(1998)}{-\ln(4)}$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln(1998)}{\ln(4)}$. Or, $\dfrac{\ln(1998)}{\ln(4)} \simeq 5{,}48$.

c) $e^{2x}+e^{x}-12=0 \iff (e^{x})^2+e^{x}-12=0$

Posons $y=e^{x}$: l'équation proposée devient : $\underbrace{y^2+y-12=0}_{\text{équation du 2nd degré en la variable } y}$.

$a=1$; $b=1$; $c=-12$. $\Delta = 1^2-4\times1\times(-12)=49=7^2$.

Deux racines réelles car $\Delta>0$: $\begin{cases} y_1=\frac{-1-7}{2}=-4 \\ y_2=\frac{-1+7}{2}=3 \end{cases}$

<u>Retour à la variable x :</u> $y=e^{x}$ et $y\in\{-4;3\}$ donc on résout :

$e^{x}=-4 \rightarrow$ Pas de solution réelle car $\forall x\in\mathbb{R}, e^{x}>0$.

$e^{x}=3 \iff \ln(e^{x})=\ln(3) \iff x=\ln(3)$

$\mathcal{S}=\{\ln(3)\}$.

α) $1-0{,}84^n>0{,}95 \iff 1-0{,}95>0{,}84^n \iff 0{,}84^n<0{,}05 \iff \ln(0{,}84^n)<\ln(0{,}05)$ (croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\iff n\ln(0{,}84)<\ln(0{,}05)$

$\iff n>\frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}84)}$ car $\ln(0{,}84)<0$ vu que $\forall x\in]0;1[, \ln(x)<0$

Or $\frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}84)}\approx 17{,}18$, donc $\underline{n_0=18}$

β) $0{,}34^n<10^{-6} \iff \ln(0{,}34^n)<\ln(10^{-6}) \iff n\ln(0{,}34)<-6\ln(10)$

$\iff n>\frac{-6\ln(10)}{\ln(0{,}34)}$ avec $\frac{-6\ln(10)}{\ln(0{,}34)}\approx 12{,}81$

$\iff n\geqslant 13$

Donc ici $\underline{n_0=13}$.

2) $g(t)=10^6\times e^{0{,}25t}$

a) $g(0)=10^6\times e^{0{,}25\times0}=10^6$: Population initiale.

b) On cherche $t\in[0;+\infty[$ tel que $g(t)=2g(0)=2\times10^6$.

$g(t)=2\times10^6 \iff 10^6\times e^{0{,}25t}=2\times10^6 \iff e^{0{,}25t}=2 \iff \ln(e^{0{,}25t})=\ln(2)$

$g(t)=2\times10^6 \iff 0{,}25t=\ln(2) \iff \underline{t}=\frac{\ln(2)}{0{,}25}=\frac{\ln(2)}{\frac{1}{4}}=\underline{4\ln(2)}$. $S=\{4\ln(2)\}$

$t\simeq 2{,}77$ h.

Pour que $g(t)=10\,g(0)$, on résout : $10^6\times e^{0{,}25t}=10\times10^6 \iff e^{0{,}25t}=10 \iff \ln(e^{0{,}25t})=\ln(10)$

$\iff 0{,}25t=\ln(10) \iff t=\frac{\ln(10)}{0{,}25}$.

$S=\{4\ln(10)\}$. $t=4\ln(10)$ $t\simeq 9{,}21$ h.

Exercice II

1. f_a est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) = e^{x-a} - 2$
$f_a'(x) > 0 \iff e^{x-a} - 2 > 0 \iff e^{x-a} > 2 \iff x - a > \ln 2 \iff x > a + \ln 2$
$f_a'(x)$ s'annule et change de signe pour $x = a + \ln 2$ en étant négatif puis positif donc f_a admet un minimum en $a + \ln 2$ égal à
$f_a(a+\ln 2) = e^{a+\ln 2 - a} - 2(a+\ln 2) + e^a = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$.

x	$-\infty$		$a+\ln 2$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
f_a		$\searrow$	$f_a(a+\ln 2)$	$\nearrow$	

2. En $a + \ln 2$, on a $f_a(a+\ln 2) = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$.
Afin de minimiser ce minimum, on étudie les variations de la fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $\varphi(a) = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$.
$\varphi'(a) = -2 + e^a$;

- $-2 + e^a > 0 \iff e^a > 2 \iff a > \ln 2$;
- $-2 + e^a < 0 \iff e^a < 2 \iff a < \ln 2$;

$\varphi'(a)$ s'annule et passe de négatif à positif en $a = \ln 2$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	$4 - 4\ln 2$	$\nearrow$	

Prendre $a = \ln 2$, minimise donc le minimum de f_a qui est égal à
$\varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 - 2\ln 2 + e^{\ln 2} = 4 - 4\ln 2$.

Exercice III

42 **a)** $\theta(t) = 12{,}5$ équivaut à $25 - 10e^{0,1t} = 12{,}5$ c'est-à-dire $e^{0,1t} = 1{,}25$ soit $0{,}1t = \ln(1{,}25)$.

Donc $t = \dfrac{\ln(1{,}25)}{0{,}1}$ et $t \approx 2{,}2$.

La température atteindra 12,5 °C au bout d'environ 2,2 minutes.

b) $\theta(t) = 0$ équivaut à $25 - 10e^{0,1t} = 0$ c'est-à-dire $e^{0,1t} = 2{,}5$ soit $0{,}1t = \ln(2{,}5)$.

Donc $t = \dfrac{\ln(2{,}5)}{0{,}1}$ et $t \approx 9{,}2$.

La température atteindra 0°C au bout d'environ 9,2 minutes.

52 **a)** Les abscisses de chacun des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses vérifient l'équation $f(x) = 0$ c'est-à-dire $(\ln(x) - 1)(3 - \ln(x)) = 0$ soit $x = \mathrm{e}$ ou $x = \mathrm{e}^3$.

Les abscisses de chacun des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses sont e et e^3.

b) On peut dresser ce tableau de signes.

x	0		e		e^3		$+\infty$
$\ln(x) - 1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$3 - \ln(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

f est négative sur $]0\,;\mathrm{e}] \cup]\mathrm{e}^3\,;+\infty[$.

f est positive sur $]\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^3[$.

64b)

b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $2x - 3 > 0$, $x + 1 > 0$ et $x - 3 > 0$ c'est-à-dire $x > \dfrac{3}{2}$, $x > -1$ et $x > 3$ donc $\mathrm{E} =]3\,;+\infty[$.

Pour tout réel x de E, $\ln(2x - 3) - 2\ln(x + 1) = \ln(x - 3)$ s'écrit aussi $\ln(2x - 3) = \ln((x + 1)^2) + \ln(x - 3)$ soit $\ln(2x - 3) = \ln((x + 1)^2(x - 3))$.

Ce qui équivaut à $2x - 3 = (x + 1)^2(x - 3)$ soit $2x - 3 = (x^2 + 2x + 1)(x - 3)$ c'est-à-dire $x^3 - x^2 - 7x = 0$.

$x^3 - x^2 - 7x = 0$ équivaut à $x(x^2 - x - 7) = 0$ soit $x = 0$, $x = \dfrac{1 + \sqrt{29}}{2}$ ou $x = \dfrac{1 - \sqrt{29}}{2}$.

Seul $\dfrac{1 + \sqrt{29}}{2}$ appartient à E.

Donc $\mathrm{S} = \left\{\dfrac{1 + \sqrt{29}}{2}\right\}$.

Exercice IV

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x+4-4\ln(x)-\dfrac{3}{x}$,
où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$f(x) = x\left(1-4\frac{\ln(x)}{x}\right)+4-\frac{3}{x}$$

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} x\left(1-4\frac{\ln(x)}{x}\right)+4 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

$$f'(x) = 1+0-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2} = \frac{x^2-4x+3}{x^2}$$

3. a. On cherche le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$:

$x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$

x	0		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$\parallel$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(1) = 1+4-4\ln(1)-\dfrac{3}{1} = 2$; $f(3) = 3+4-4\ln(3)-\dfrac{3}{3} = 6-4\ln(3) \approx 1{,}69$

On établit le tableau des variations de f en admettant que que $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$:

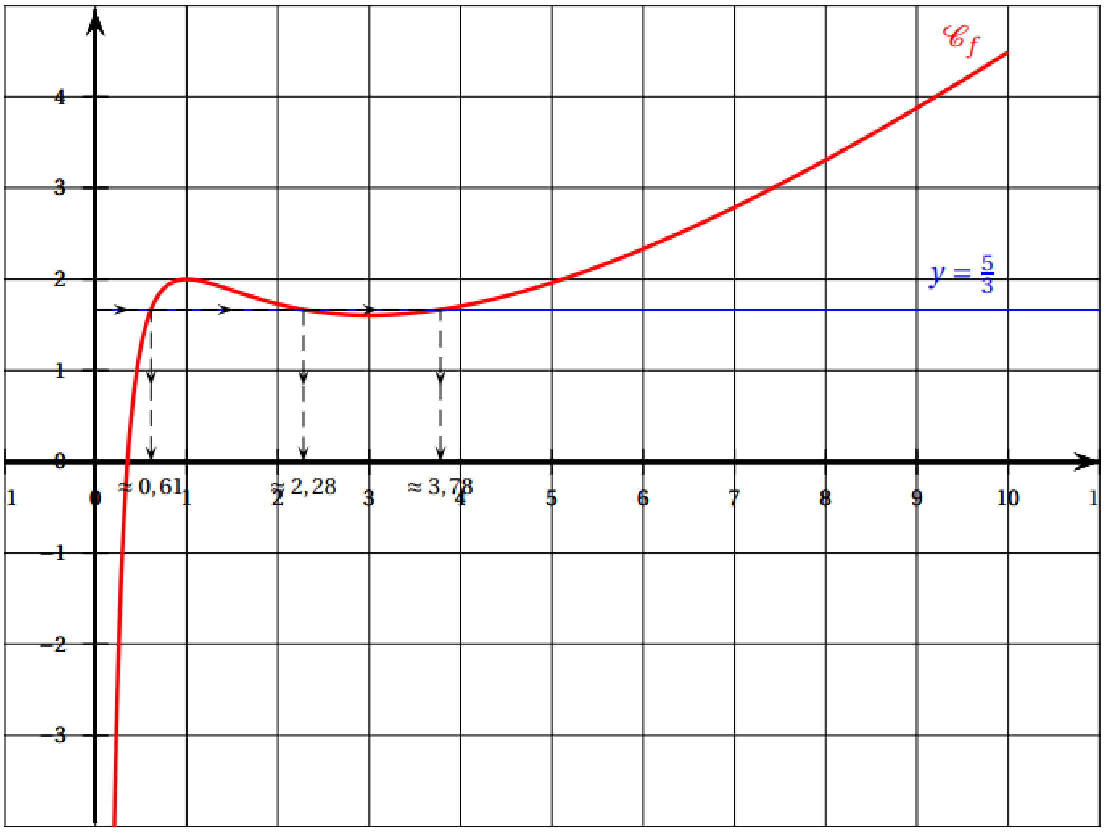
x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\parallel$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$6-4\ln(3) \approx 1{,}61$	$\nearrow$	$+\infty$

b.

- $\dfrac{5}{3} \in]-\infty\,;\,2]$ donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.
- $\dfrac{5}{3} \approx 1{,}67$ et $f(3) = 6-4\ln 3 \approx 1{,}61$ donc $\dfrac{5}{3} \in [6-4\ln 3\,;\,2]$, donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\,;\,3[$.
- $\dfrac{5}{3} \in [6-4\ln 3\,;\,+\infty[$, donc $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

Conclusion : l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet donc trois solutions dans $]0\,;\,+\infty[$.

Voir cidessus les valeurs approchées des solutions.



4. Pour étudier la convexité de f, on détermine le signe de f'', la dérivée seconde de f.

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$ donc

$$f''(x) = \frac{(2x-4) \times x^2 - (x^2 - 4x + 3) \times 2x}{x^4} = \frac{(2x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 6) \times x}{x^4} = \frac{4x - 6}{x^3}$$

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x-6$		$-$	0	$+$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
	‖	f concave		f convexe	

La dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{3}{2}$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + 4 - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{11}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{7}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

La courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{7}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$.

Exercice V

Partie A $x \in [0, +\infty[$ et $f(x) = 5\ln(x+3) - x$.

① $f(x) = 5\ln(u(x)) - x$ avec : $u(x) = x+3$ et $u'(x) = 1$

ⓐ $f'(x) = 5 \times \frac{u'(x)}{u(x)} - 1 = 5 \times \frac{1}{x+3} - 1 = \frac{5}{x+3} - 1 = \frac{5}{x+3} - \frac{(x+3)}{x+3} = \frac{5-(x+3)}{x+3} = \frac{5-x-3}{x+3} = \frac{-x+2}{x+3}$.

Or $x \geq 0$, donc $x+3 \geq 3 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que : $-x+2$.

Par suite, $f'(x) \geq 0 \iff -x+2 \geq 0 \iff 2 \geq x$.

Voici d'après le théorème de Lagrange :

ⓑ

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$5\ln(3)$	$\nearrow$	$5\ln(5)-2$	$\searrow$	$-\infty$ → cf q. ⓓ !

$f(2) = 5\ln(5) - 2$

ⓒ $f(x) = 5\ln(x+3) - x \overset{\text{Pour } x>0}{=} x\left(\frac{5\ln(x+3)}{x} - 1\right)$

$f(x) = x\left(\frac{5\ln\left(x\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)}{x} - 1\right) = x\left(\frac{5\ln(x) + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x} - 1\right)$.

$f(x) = x\left(\frac{5\ln(x)}{x} - 1\right) + \frac{\cancel{x} \times 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}}$

Pour $x>0$

$$\boxed{f(x) = x\left(\frac{5\ln(x)}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

ⓓ On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (limite de référence), donc $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5\ln(x)}{x} - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$, donc par limite de produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{5\ln(x)}{x} - 1\right) = -\infty$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = 0$, donc par limite de composée et de produit :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = 0$.

Par suite, par limite de somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ cf c).

②ⓐ $5\ln(3) \approx 5{,}49$, donc $5\ln(3) > 0$

f croît sur $[0;2]$, et $f(0) > 0$, donc $f(x) > 0$ sur $[0;2]$, donc sur cet intervalle, l'équation

$f(x)=0$ n'a pas de solution sur $[0;2]$. ②

Sur $[2;+\infty[$:
(*) f est continue car dérivable.
(**) f est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$.
(***) $f(2)=5\ln(5)-2$ ($\simeq 6{,}047$) donc $f(2)>0$.
Par suite, $0\in]-\infty;5\ln(5)-2]$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution notée α avec $\alpha\in[2;+\infty[$.

Par suite, $f(x)=0$ a pour unique solution α, avec $\alpha\in[0;+\infty[$.

2b) $f(14)\simeq 0{,}166$, donc $f(14)>0$
$f(15)\simeq -0{,}548$, donc $f(15)<0$ / Par suite, $14\leq\alpha\leq 15$.

Grâce à ma calculatrice et à la méthode de balayages on obtient :

Pas égal à 0,1 :

x	$f(x)$
14,2	0,0245
14,3	−0,046

Pas égal à 0,01

x	$f(x)$
14,23	0,0033
14,24	−0,004

Donc : $14{,}23<\alpha<14{,}24$ donc $\alpha\simeq 14{,}2$ à 10^{-1} près.

c)

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	

$f(\alpha)=0$ et f décroît sur $[\alpha;+\infty[$
donc $f(x)\leq 0$ si $x\in[\alpha;+\infty[$.

Partie B

1a) Cf. annexe.

1b) Il semblerait que la suite (u_n) soit croissante.

2a) $g(x)=5\ln(x+3)$.
$g'(x)=\frac{5}{x+3}$ (cf. A.1) donc pour tout réel $x\geq 0$, $\frac{5}{x+3}>0$, donc $g'(x)>0$ sur $[0;+\infty[$.
D'après le th. de Lagrange, g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2b) On sait que $f(\alpha)=0$ donc que : $5\ln(\alpha+3)-\alpha=0$ donc que $5\ln(\alpha+3)=\alpha$, donc que $g(\alpha)=\alpha$.

2c) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq \alpha$.

Initialisation : Pour $n=0$: $u_0 = 4$ et $0 \leq 4 \leq \alpha$ est vraie, car $14 < \alpha < 15$!
donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel (fixé) tel que : $\mathcal{P}(n)$ est vraie i.e $0 \leq u_n \leq \alpha$.
Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : Or par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq \alpha$ et $u_{n+1} = g(u_n)$
donc comme g croît sur $[0;\alpha]$ on a : $g(0) \leq g(u_n) \leq g(\alpha)$.

donc : $5\ln(3) \leq u_{n+1} \leq \overbrace{\alpha}^{}$ par B.2b.

Or $5\ln(3) \geq 0$, donc on a bien : $0 \leq u_{n+1} \leq \alpha$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.
donc d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \alpha}$

2d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} - u_n} = g(u_n) - u_n = \boxed{f(u_n)}$ car $g(x) = f(x) - x$.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \alpha$ (par 2b), et f ~~est~~ à valeurs positives sur $[0;\alpha]$ d'après A-2-c.
donc $f(u_n) \geq 0$ et par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$: donc (u_n) croît et la conjecture du B1b) est ainsi validée.

2e) (u_n) croît et est majorée par α d'après B-2-c), donc (u_n) converge.
Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$: le passage à la limite dans : $u_{n+1} = g(u_n)$ conduit à : $\ell = g(\ell)$

$\iff g(\ell) - \ell = 0$

$\iff f(\ell) = 0$.

Grâce à A-2a), on en déduit que $\ell = \alpha$ car $f(x) = 0$ a pour unique solution α sur $[0;+\infty[$.

3) o) Cet algorithme permet de déterminer, (s'il existe) le plus petit réel u tel que $g(u) \geq 14{,}2$.

a) Cet algo. est associé à la suite (u_n). Or (u_n) converge en croissant vers α avec $14{,}23 < \alpha < 14{,}24$;
donc il existe un rang N à partir duquel : $n \geq N \Rightarrow u_n \geq 14{,}2$, donc l'algo. se termine à coup sûr.
(le fait que (u_n) croisse assure l'existence d'un plus petit entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 14{,}2$ si $N \leq n$.

b) Grâce à une calculatrice : on trouve en sortie : $\boxed{u \simeq 14{,}22315}$

Annexe 1