Terminale, Maths — Corrigé du DM1 — Septembre 2021

Exercice I

a) Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f (notée $\mathcal{C}_f$) et de l'axe des abscisses.

Ici, $f(x)=0$ lorsque $x=-0,5$. $\boxed{\mathcal{S}=\{-0,5\}}$

b) Les solutions de l'inéquation $f(x)\geqslant 0$ sont les abscisses de tous les points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessus de l'axe des abscisses en y incluant les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses.

$f(x)\geqslant 0$ équivaut à $x\geqslant -0,5$. $\boxed{\mathcal{S}=[-0,5\,;+\infty[}$

$f(x)<-2$ correspond aux abscisses de tous les points de $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est strictement inférieure à 2.

$f(x)<-2$ équivaut à : $-5<x<-1$. $\boxed{\mathcal{S}=]-5\,;-1[}$

c) $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse $\cancel{x}$.

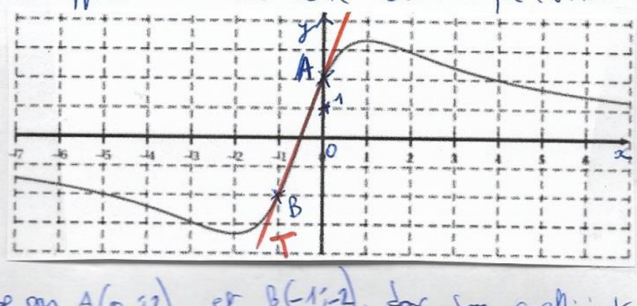
Dire que $f'(x)=0$ signifie qu'on a une tangente de coefficient directeur nul, donc une droite parallèle à l'axe des abscisses (dite HORIZONTALE).

Résoudre $f'(x)=0$ revient donc à chercher les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels il y a une tangente horizontale.

Graphiquement, $f'(x)=0$ équivaut à : $x=-2$ ou $x=1$: $\boxed{\mathcal{S}=\{-2\,;1\}}$

d) $f'(0)=$ coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 0, c'est-à-dire le point $A(0\,;2)$

On trace approximativement cette dernière que l'on nomme T (en orange)



T passe par $A(0\,;2)$ et $B(-1\,;-2)$, donc son coefficient directeur est :

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2-2}{-1-0}=\frac{-4}{-1}=4$$

Par suite, $\boxed{f'(0)=4}$

<u>Partie B</u>

1a) f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ car c'est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$ et que le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$

e)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f		$\searrow$	$-3{,}3$	$\nearrow$	$3{,}3$	$\searrow$	

Exercice II

Partie A

g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x$

g est ici écrite sous la forme d'un produit uv, où u et v sont les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ respectivement définies par : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = e^x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ ♡ dérivée de l'exponentielle = elle même !

Or, si $g = uv$, alors $g' = u'v + uv'$ (dérivée d'un produit ♡), de sorte que :

Pour tout réel x, $g'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = e^x(x+1)$.

Etudions à présent le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

Pour tout réel x, $e^x > 0$ (Propriété phare de l'exponentielle = fonction qui ne prend que des valeurs strictement POSITIVES).

Par suite, $g'(x)$ a le même signe que $x+1$.

Ainsi, $g'(x) \geq 0 \iff x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$.

Donc on déduit que :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	

avec $g(-1) = -1e^{-1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

$f(x) = \dfrac{4x+3}{x+1}$, donc f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, où u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$

par : $\begin{cases} u(x) = 4x+3 \\ u'(x) = 4 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = x+1 \\ v'(x) = 1 \ (*) \end{cases}$

Or, si $f = \dfrac{u}{v}$, alors $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ (dérivée d'un quotient)

donc, pour tout réel x appartenant à $\mathcal{D}f$, on a :

$$\boxed{f'(x)} = \frac{4(x+1) - (4x+3)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{4x+4-4x-3}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{1}{(x+1)^2}}$$

Rappels : ① Si g est affine de la forme $g(x) = ax+b$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = a$.

$(*)$ $x+1 = 1x+1$!

1b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathcal{D}f$ va nous permettre de déduire le sens de variation de f :

Plus précisément : Si I est un intervalle, et f une fonction dérivable sur I on a :

1°) Si pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.

2°) Si pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.

Ici, pour tout réel $x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$. Or $1 > 0$ et comme $x \neq -1$, $(x+1)^2 > 0$ en tant que carré d'un réel non nul !

donc $f'(x) > 0$ (quotient de deux nombres strictement positifs).

Par suite, f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty ; -1[$ et $]-1 ; +\infty[$.

$]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$ n'est pas un intervalle !

D'où :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
Variation de f		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

La double barre pour $x = -1$ indique que cette valeur est interdite pour f et f'.

1c) $f(0) = 3$, donc

$L(0;3) \in \mathcal{C}_f$ et f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, donc f est en particulier dérivable en 0.

Par suite, $\mathcal{C}_f$ admet en le point L une tangente notée (T_L) dont l'équation réduite est :

$y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$ où $a = 0 =$ abscisse du point L.

$y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$

$y = f'(0) \times x + f(0)$ avec : $\begin{cases} f'(0) = \dfrac{1}{(0+1)^2} = \dfrac{1}{1} = 1 \text{ d'après la question 2a) : on a fait } x=0 \text{ dans l'expression de } f'(x) \text{ !} \\ f(0) = 3 \text{ d'après la question 1b)} \end{cases}$

$\boxed{y = x + 3 \text{ : équation réduite de } (T_L).}$

1d)

__Rappel__ : Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I.

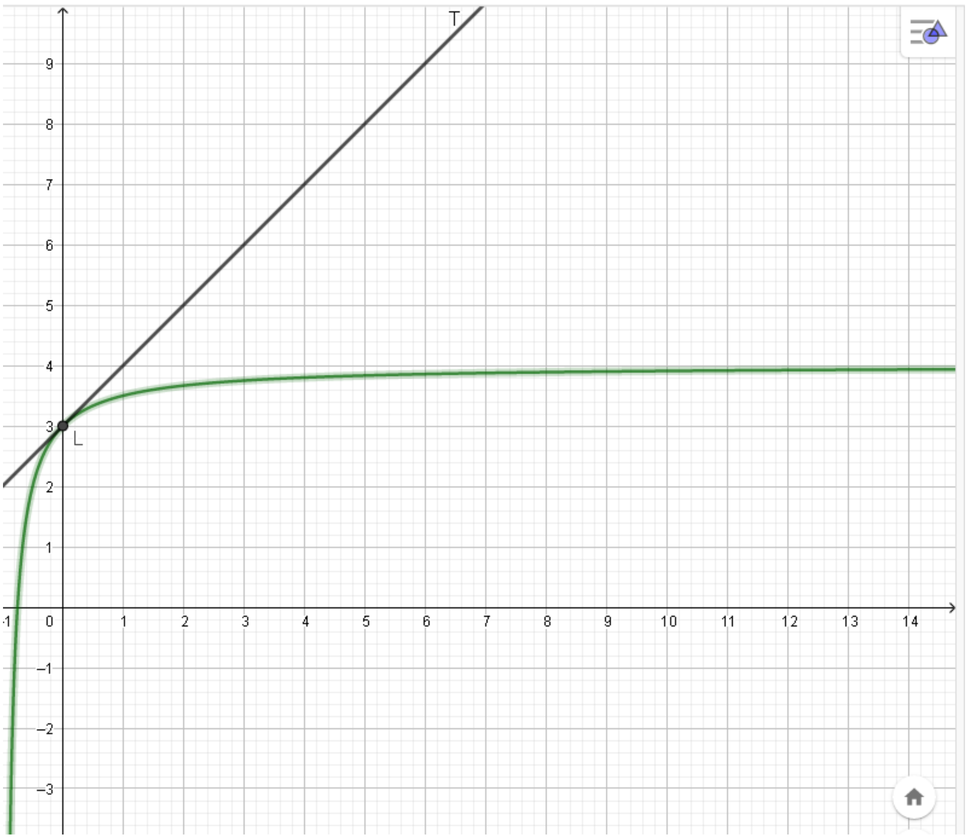
$\mathcal{C}_f$ admet sur I autant de tangentes HORIZONTALES que l'équation : $\underbrace{f'(x)}_{\text{Valeur du coefficient directeur de la tangente à } \mathcal{C}_f \text{ en son point d'abscisse } x} = \underbrace{0}_{\text{Valeur du coefficient directeur des droites HORIZONTALES}}$ a de solutions sur I.

$\boxed{\text{Nombre de tangentes horizontales} = \text{Nombre de solutions de l'équation } f'(x) = 0}$

Or grâce à 2a), $f'(x) > 0$ pour tout réel x appartenant à $\mathcal{D}_f$.

Par suite, l'équation $f'(x) = 0$ n'a __aucune solution sur $\mathcal{D}_f$__, et par suite, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ n'admet AUCUNE tangente horizontale !}}$

1e)



2)

<u>Rappel</u> : chercher les abscisses des éventuels points d'intersection de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ revient à résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$.

$M(x;y) \in \mathcal{C}_f \cap (\Delta) \iff \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$, donc on résout ici l'équation : $f(x) = x$ sur $\underbrace{\mathcal{D}_f}_{\text{c'est-à-dire que } x \neq -1}$.

$f(x) = x \iff \left(\dfrac{4x+3}{x+1} = x \text{ et } x \neq -1\right) \iff 4x+3 = x(x+1)$ car $x \neq -1$

$f(x) = x \iff 4x+3 = x^2 + x$ et $x \neq -1 \iff x^2 - 4x + x - 3 = 0$ et $x \neq -1)$

$f(x) = x \iff \underbrace{x^2 - 3x - 3 = 0}_{\text{équation du 2e degré de la forme : } ax^2+bx+c=0 \text{ avec : } \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -3 \end{cases}}$ et $x \neq -1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 9 + 12 = 21$

$\Delta > 0$, donc cette équation a deux solutions réelles : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3)-\sqrt{21}}{2} = \dfrac{3-\sqrt{21}}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2} \end{cases}$

$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2} ; \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2}\right\}$

Vu que $\overbrace{\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2} \neq -1 \text{ et } \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2} \neq -1}^{\text{utiliser une calculatrice si besoin est !}}$,

$\mathcal{C}_f$ et (Δ) ont deux points d'intersection nommés E et F avec $x_E = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2}$ et $x_F = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2}$

Exercice III

(5)

1 Application : Pour tout entier naturel n, $u_n = 2n^2+n+3$

1) $\boxed{u_0} = 2\times 0^2+0+3 = \boxed{3}$

$\boxed{u_1} = 2\times 1^2+1+3 = \boxed{6}$

$\boxed{u_2} = 2\times 2^2+2+3 = \boxed{13}$

2a) $\boxed{u_7} = \boxed{108}$

Le onzième terme de la suite (u_n) est u_{10} car (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ (le premier entier naturel est 0).

$\boxed{u_{10}} = \boxed{213}$

2b)

n	u_n
0	3
1	6
2	13
3	24
4	39
5	58
6	81
7	108
8	139
9	213

Il semblerait que la suite (u_n) soit strictement croissante.

2 $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel, $\boxed{u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n+1 \quad (\#)}$

on fait $n=0$ dans la relation $(\#)$:

1 $\boxed{u_1} = (u_{0+1}) = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4}\times 0+1 = \frac{3}{4}\times 1+1 = \frac{3}{4}+\frac{4}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}$

On fait $n=1$ dans $(\#)$: $u_2 = (u_{1+1}) = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4}\times 1+1 = \frac{3}{4}\times\frac{7}{4}+\frac{1}{4}+1 = \frac{21}{16}+\frac{1}{4}+1$

$\boxed{u_2} = \frac{21}{16}+\frac{4}{16}+\frac{16}{16} = \boxed{\frac{41}{16}}$

2a Par exemple : $\boxed{= 3*B2/4 + A2/4+1}$ On commence toujours par = avec excel pour saisir une formule.

2b Manifestement, en étirant les résultats de la colonne B, il semblerait que la suite (u_n) soit strictement croissante.

3 Pour tout entier naturel n, u_n est le nombre d'abeilles en l'an $2020+n$.

a) u_0 = nombre d'abeilles en 2020, donc $u_0 = 30.000$.

b) $\boxed{u_1} = 30.000\times\left(1-\frac{40}{100}\right)+10000 = 30000\times 0,6+10000 = 18000+10000 = \boxed{28000}$

Rappel : Diminuer un nombre de 40% revient à multiplier ce dernier par $1-\frac{40}{100} = 0,6$.

c) $u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{40}{100}\right) + 10000$

$\boxed{u_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 10000}$ (même principe qu'à la question précédente).

d) Grâce à la calculatrice :

$2030 = 2020 + 10$, donc on cherche ici u_{10} : $\underline{u_{10}} \approx \underline{25030}$: il y aura, selon ce modèle, environ 25030 abeilles dans la ruche en l'an 2030.

Grâce à la calculatrice :

n	u_n
10	25030
11	25018
12	25011
13	25007
14	25004
15	25002
16	25001
⋮	25000
19	25000
20	25000
⋮	⋮
⋮	25000

Il semblerait que la suite (u_n) converge vers 25000 ce que l'on note : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 25.000}$

A très long terme (= au bout d'un très grand nombre d'année), la population d'abeilles de cette ruche se stabilisera à 25.000 individus.

Exercice IV

0) $\boxed{u_0} = \boxed{3000}$ (= nombre d'inscrits en l'an 2017).

1) $\boxed{u_1} = \frac{75}{100} \times u_0 + 500 = 0{,}75 \times 3000 + 500 = 2250 + 500 = \boxed{2750}$.

En l'an 2018, il y avait 2750 inscrits à la médiathèque.

2) $u_{n+1} = \underbrace{\frac{75}{100} \times u_n}_{\text{Nombre d'inscrits de l'an 2017+n qui renouvellent leur inscription}} + \underbrace{500}_{\text{nombre de nouveaux inscrits en l'an 2017+n+1}}$

donc pour tout entier naturel n : $\boxed{u_{n+1} = 0{,}75\,u_n + 500}$

3) Pour tout entier naturel n, $V_n = u_n - 2000$.

a) Pour $n=0$: $\boxed{V_0} = u_0 - 2000 = 3000 - 2000 = \boxed{1000}$

b) (V_n) est une suite géométrique de raison Q signifie que : Pour tout entier naturel n, $\boxed{V_{n+1} = QV_n}$
(Concrètement, on passe d'un terme de la suite au suivant en multipliant par le même nombre réel Q, quel que soit le terme de la suite).

c) But : On va démontrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0{,}75V_n$, donc il faut exprimer V_{n+1} en fonction de V_n !

Or par l'énoncé, on sait que, pour tout entier naturel n, (*) $V_n = u_n - 2000$

Donc en écrivant la précédente relation au rang $n+1$ on a : (#) $V_{n+1} = u_{n+1} - 2000$

On sait de plus, d'après la définition de la suite (u_n) de la question ②, que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 500$.

Donc grâce à (#) on a que : $V_{n+1} = 0{,}75u_n + 500 - 2000$

$$V_{n+1} = 0{,}75u_n - 1500$$

Or grâce à (*), $V_n = u_n - 2000$, donc $u_n = V_n + 2000$, de sorte que, en substituant à u_n cette valeur dans la dernière relation obtenue, on a :

$$V_{n+1} = 0{,}75(V_n + 2000) - 1500$$

$$V_{n+1} = 0{,}75V_n + 0{,}75\times 2000 - 1500$$

$$V_{n+1} = 0{,}75V_n + 1500 - 1500$$

$$\boxed{V_{n+1} = 0{,}75V_n}$$

Donc la suite (V_n) est bien une suite géométrique de raison $Q = 0{,}75$.

d) On sait à présent que (V_n) est géométrique de raison $Q = 0{,}75$ et $V_0 = 1000$ d'après 3a).
Donc on peut dire (cf. cours 1re), que pour tout entier naturel n, $V_n = V_0 \times Q^n$

Donc $\boxed{V_n = 1000 \times 0{,}75^n}$

Grâce à (*), $V_n = u_n - 2000$, donc $\boxed{u_n} = V_n + 2000 = \boxed{1000 \times 0{,}75^n + 2000}$ (Pour tout entier naturel n).

8

4) $2031 = 2017+14$. et u_n = nombre d'adhérents en l'an $2017+n$.
On cherche donc ici u_{14}.
Grâce à la relation obtenue à la question 3d) et appliquée à $n=14$, on a :

$$u_{14} = 1000 \times 0{,}75^{14} + 2000$$

$\boxed{u_{14} \approx 2018}$ en arrondissant à l'unité près.

La médiathèque aura environ 2018 adhérents en l'an 2031.

5) Méthode : Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) on utilise fréquemment la méthode de la différence, c'est à dire qu'on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:
*) Si pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors (u_n) croît.
**) Si pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors (u_n) décroît.

Ici, pour tout entier n, on a : $u_n = 1000 \times 0{,}75^n + 2000$, donc $u_{n+1} = 1000 \times 0{,}75^{n+1} + 2000$.
Par suite : $u_{n+1} - u_n = 1000 \times 0{,}75^{n+1} + 2000 - (1000 \times 0{,}75^n + 2000)$

$u_{n+1} - u_n = 1000 \times 0{,}75^{n+1} + \cancel{2000} - 1000 \times 0{,}75^n - \cancel{2000}$

on soustrait une quantité complexe, ne pas oublier les parenthèses.

En observant que $0{,}75^{n+1} = 0{,}75^n \times 0{,}75$, il vient que :

$u_{n+1} - u_n = 1000 \times 0{,}75^n \times 0{,}75 - 1000 \times 0{,}75^n \times 1$

$u_{n+1} - u_n = 1000 \times 0{,}75^n \times (0{,}75 - 1)$

on factorise par $1000 \times 0{,}75^n$ ($= k$) avec : $ka - kb = k(a-b)$.

$u_{n+1} - u_n = 1000 \times 0{,}75^n \times (-0{,}25) = 1000 \times (-0{,}25) \times 0{,}75^n$

$u_{n+1} - u_n = -250 \times 0{,}75^n$

Or $-250 < 0$ et $0{,}75 > 0$, donc, pour tout entier n, $0{,}75^n > 0$ $\quad (0{,}75^n = \underbrace{0{,}75 \times \cdots 0{,}75}_{n \text{ facteurs}})$ >0.
D'après la règle des signes d'un produit, $-250 \times 0{,}75^n < 0$.

Par suite, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Cela signifie ici qu'au fil des années, le nombre d'adhérents de la médiathèque diminue.
(i.e il diminue année après année).

6) On fait une table de valeurs de (u_n) à l'aide de ma calculatrice, pour des valeurs de n grandes (10, 20 ...).

n	10	20	25	30	50	100	1000
u_n arrondi à l'unité près	2056	2003	2001	2000	2000	2000	2000

A très long terme, c'est à dire au bout d'un très grand nombre d'années, la population de la ville inscrite à la médiathèque va se stabiliser à 2000 individus.

7) a) Il détermine la première année à partir de laquelle le nombre d'adhérents de la médiathèque devient inférieur ou égal à 2100.
Pour le voir on regarde le While : le programme tourne tant que $u > 2100$ (u = population de la médiathèque en l'an 2017 + n), il cesse de tourner dès que $[u > 2100]$ n'est plus vraie, à savoir dès que $u \leq 2100$.

b) Python affiche en sortie : 2026
En l'an 2026, pour la première fois, le nombre d'adhérents de la médiathèque passe sous la barre des 2100 inscrits.