Exercice I

72 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-7x} - 2$.
Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = -14e^{-7x}$.

Donc, pour tout réel x,

$f'(x) + 7f(x) + 14 = -14e^{-7x} + 7(2e^{-7x} - 2) + 14 = 0$.

Ainsi f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 7y + 14 = 0$.

75 **a)** Pour tout réel x, $g(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$, donc $g'(x) = 0$. g est solution de (**E**) si, et seulement si, $g' = -3g + 4$, c'est-à-dire $0 = -3c + 4$ soit $c = \frac{4}{3}$.

b) f est solution de (**E**) si, et seulement si, $f' = -3f + 4$.

Or $g' = -3g + 4$. Ainsi, f est solution de (**E**) si, et seulement si, $f' - g' = -3(f - g)$ c'est-à-dire $(f - g)' = -3(f - g)$. Autrement dit, f est solution de (**E**) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = -3y$.

c) f est solution de (**E**) si, et seulement si, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = ke^{-3x}$ où k est un nombre réel, c'est-à-dire $f(x) = ke^{-3x} + \frac{4}{3}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -3y + 4$ sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{-3x} + \frac{4}{3}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

d) f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -3y + 4$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{-3x} + \frac{4}{3}$.

Or $f(-1) = 0$, ainsi $ke^{3} + \frac{4}{3} = 0$ soit $k = -\frac{4}{3}e^{-3}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -3y + 4$ qui vérifie $f(-1) = 0$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -\frac{4}{3}e^{-3}e^{-3x} + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}e^{-3-3x} + \frac{4}{3}.$$

78 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 7y - 5$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{7x} - \frac{-5}{7}$ soit $x \mapsto ke^{7x} + \frac{5}{7}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 7y - 5$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{7x} + \frac{5}{7}$.

Or $f(-2) = -3$, ainsi $ke^{-14} + \frac{5}{7} = -3$ soit $k = -\frac{26}{7}e^{14}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 7y - 5$ qui vérifie $f(-2) = -3$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -\frac{26}{7}e^{14}e^{7x} + \frac{5}{7} = -\frac{26}{7}e^{14+7x} + \frac{5}{7}.$$

81 f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-2y' + 11y = 4$ donc, pour tout réel x, $-2f'(x) + 11f(x) = 4$. Donc $-2f'(-1) + 11f(-1) = 4$. Or $f'(-1) = 1$, ainsi $-2 + 11f(-1) = 4$

soit $f(-1) = \dfrac{6}{11}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-2y' + 11y = 4$ soit $y' = \dfrac{11}{2}y - 2$ sont les fonctions

$x \mapsto ke^{\frac{11}{2}x} - \dfrac{-2}{\dfrac{11}{2}}$ soit $x \mapsto ke^{\frac{11}{2}x} + \dfrac{4}{11}$ définies sur $\mathbb{R}$

où k est un nombre réel.

f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-2y' + 11y = 4$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{\frac{11}{2}x} + \dfrac{4}{11}$.

Or $f(-1) = \dfrac{6}{11}$, ainsi $ke^{-\frac{11}{2}} + \dfrac{4}{11} = \dfrac{6}{11}$ soit $k = \dfrac{2}{11}e^{\frac{11}{2}}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-2y' + 11y = 4$ qui vérifie $f'(-1) = 1$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{11}e^{\frac{11}{2}+\frac{11}{2}x} + \dfrac{4}{11}$.

Exercice II

101 **a)** La fonction f est dérivable et pour tout réel x,
$f'(x) = 2e^{2x}\sin(x) + e^{2x}\cos(x)$
soit $f'(x) = e^{2x}(2\sin(x) + \cos(x))$.

La fonction f' est dérivable et pour tout réel x,
$f''(x) = 2e^{2x}(2\sin(x) + \cos(x)) + e^{2x}(2\cos(x) - \sin(x))$
soit $f''(x) = e^{2x}(3\sin(x) + 4\cos(x))$.

b) Pour tout réel x, $f(x) = af'(x) + bf''(x)$ est équivalent à, pour tout réel x,
$e^{2x}\sin(x) = e^{2x}((2a+3b)\sin(x) + (a+4b)\cos(x))$.

Ce qui est équivalent à, pour tout réel x,
$e^{2x}\sin(x) = e^{2x}((2a+3b)\sin(x) + (a+4b)\cos(x))$.

Ainsi, par identification, on a le système d'équations suivant : $\begin{cases} 2a+3b = 1 (\ell_1) \\ a+4b = 0 (\ell_2) \end{cases}$

$(\ell_1 - 2\ell_2)$ donne $-5b = 1$ d'où $b = -\dfrac{1}{5}$ et $a = \dfrac{4}{5}$.

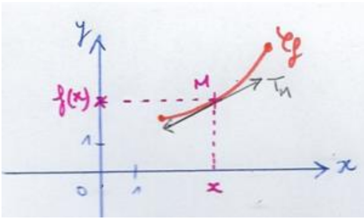
On en déduit que, pour tout réel x,
$f(x) = \dfrac{4}{5}f'(x) - \dfrac{1}{5}f''(x)$.

c) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est donc définie par
$F(x) = \dfrac{4}{5}f(x) - \dfrac{1}{5}f'(x)$. C'est-à-dire, pour tout réel x,
$F(x) = \dfrac{4}{5}e^{2x}\sin(x) - \dfrac{1}{5}e^{2x}(2\sin(x) + \cos(x))$.

Ainsi, $F(x) = e^{2x}\left(\dfrac{2}{5}\sin(x) - \dfrac{1}{5}\cos(x)\right)$.

L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est donc constitué des fonctions $x \mapsto e^{2x}\left(\dfrac{2}{5}\sin(x) - \dfrac{1}{5}\cos(x)\right) + C$ définies sur $\mathbb{R}$ où C est une constante réelle.

Exercice III



f est définie sur I
Soit T_M la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point $M(x\,;f(x))$.
T_M a pour coefficient directeur $f'(x)$.

"La pente (= coefficient directeur) de T_M est égale au carré de l'ordonnée du point M" se traduit par :

$\forall x \in I,\ f'(x) = (f(x))^2$. (en tout point M de $\mathcal{C}$, d'où le $\forall x \in I$).

Donc f est solution de l'équation différentielle : $\boxed{y' = y^2}$. (1)

b) Supposons y dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I ($\forall x \in I,\ y(x) \neq 0$, donc $y^2(x) \neq 0$).

$$\frac{y'}{y^2} = \left(-\frac{1}{y}\right)' \text{ par dérivée des fonctions composées.}$$

$$y' = y^2 \ (1) \overset{y \text{ ne s'annule pas sur } I}{\iff} \frac{y'}{y^2} = 1 \iff \left(-\frac{1}{y}\right)' = 1 \iff \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ -\frac{1}{y(x)} = x + C$$

Primitive de la fonction constante égale à 1.

$$\iff \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ y(x) = \frac{-1}{x+C}$$

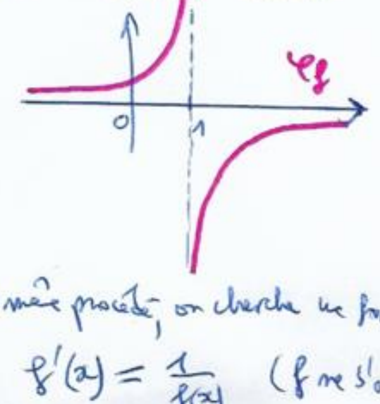
Nécessairement, $\underline{I \subset \,]-\infty; -C[\, \cup \,]-C; +\infty[}$.

c) Les fonctions f définie sur $\mathbb{R} - \{-C\}$ par : $f(x) = \frac{-1}{x+C}$ vérifient (1) et ont donc, en chacun de leurs points, une tangente dont le coefficient directeur est égal au carré de l'ordonnée de ce point.

$f(x) = \frac{-1}{x+C}$ et $f(0) = 1 \iff \frac{-1}{C} = 1 \iff C = -1$.

Donc $f(x) = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$ avec $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Allure :



d) Par le même procédé, on cherche une fonction f définie sur un intervalle I, telle que :

$\forall x \in I,\ f'(x) = \frac{1}{f(x)}$ (f ne s'annulant pas sur I).

$\forall x \in I,\ f'(x) f(x) = 1$, donc $\frac{1}{2}(f^2)'(x) = 1$, donc $\overset{(f^2)'(x) = 2}{\exists C \in \mathbb{R}},\ \forall x \in I,\ f^2(x) = 2x + C$

Vu que $\forall x \in I$, $f^2(x) > 0$ (f ne s'annule pas sur I et $f^2(x) \geq 0$) on a :

$\forall x \in I$, $2x + c > 0 \iff x > -\frac{c}{2}$.

f est donc définie sur un intervalle I contenu dans $\left]-\frac{c}{2} ; +\infty\right[$.

et $\forall x \in I$, $f^2(x) = 2x + c$, donc $f(x) = -\sqrt{2x+c}$ ou $f(x) = \sqrt{2x+c}$.

Soit $c \in \mathbb{R}$, les fonctions de la forme : $x \mapsto -\sqrt{2x+c}$ et $x \mapsto \sqrt{2x+c}$ sont les seules solutions de ce problème. (avec $x \in I$).

Exercice IV

$x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution qui ne s'annule pas de (E) sur $[0; +\infty[$, (E) : $y' = \frac{1}{20} y(10 - y)$ oui .

1) On pose $z = \frac{1}{y}$ avec y ne s'annulant pas sur $[0; +\infty[$

a) $z = \frac{1}{y}$ donc $z' = \frac{-y'}{y^2}$

Or z est solution de (E_1)

$\Leftrightarrow z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}$

$\Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{y} + \frac{1}{20}$

$\Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{2y} - \frac{1}{20}$

$\Leftrightarrow y' = y^2\left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{20}\right)$ Oui

$\Leftrightarrow y' = \frac{1}{2} y - \frac{1}{20} y^2$

$$\Leftrightarrow \underbrace{y' = \frac{1}{20} y(10 - y)}_{(E)}$$

Ainsi y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E_1) Oui

b) (E_1) : $z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}$ de la forme $y' = ay + b$

ainsi, les solutions de (E_1) sont définies par : avec $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{20} \end{cases}$

$f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

$f(x) = ke^{-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{20}}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = ke^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{20} \times \frac{2}{1}$

$$\boxed{f(x) = ke^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}}$$ Oui

$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}, \quad k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$ Oui

Ainsi, z est solution de (E_1)

$\Leftrightarrow z = ke^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}$ Oui

$\Leftrightarrow \frac{1}{y(x)} = \frac{1}{ke^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}}$

$$S_E = \left\{ \begin{array}{l} [0\,;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{ke^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}} \end{array}, k \in \mathbb{R} \right\}$$ Oui

2) Ainsi, g est solution de (E), donc :
$\exists\, k \in \mathbb{R}$, tel que : $g(x) = \dfrac{1}{ke^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}}$

Or $g(0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{ke^{0} + \frac{1}{10}} = 1$

$\Leftrightarrow k + \frac{1}{10} = 1$

$\Leftrightarrow \boxed{k = \frac{9}{10}}$

Ainsi, $g(x) = \dfrac{1}{\frac{9}{10}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}}$

$\boxed{g(x) = \dfrac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}}$ on multiplie tout par 10

3) $g(x) = 10 \times \dfrac{1}{u(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 9e^{-\frac{1}{2}x} + 1 \\ u'(x) = -4{,}5e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$ Oui

exo 4 : (suite)

3) $g'(x) = 10 \times \left(\dfrac{-u'(x)}{u(x)^2} \right)$

$\boxed{g'(x)} = 10 \times \dfrac{4,5e^{-\frac{1}{2}x}}{(9e^{-\frac{1}{2}x}+1)^2} = \boxed{\dfrac{45e^{-\frac{1}{2}x}}{(9e^{-\frac{1}{2}x}+1)^2}}$ Oui

Etude du signe de $g'(x)$ sur $[0 ; +\infty[$:

$\forall x \in [0 ; +\infty[$, $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$, $45 > 0$ donc $(9e^{-\frac{1}{2}x}+1)^2 > 0$ et $45e^{-\frac{1}{2}x} > 0$

Donc $g'(x) > 0$, ainsi g croît strictement sur $[0 ; +\infty[$ Oui

x	0	$+\infty$
$g(x)$	1 ↗	

Oui

$\nwarrow g(0) = 1$

4) $g(x) = \dfrac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x}+1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}x\right) = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \boxed{0}$, par limite de composée, somme et produit

$\lim\limits_{x \to +\infty} (9e^{-\frac{1}{2}x}+1) = \boxed{1}$, par limite de quotient.

Oui

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 10}$ À très long terme, le nombre de tels foyers se stabilisera autour de <u>10 millions</u>.

Oui

5) $g(x) \geqslant 5$

$\Leftrightarrow \dfrac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x}+1} \geqslant 5$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{9e^{-\frac{1}{2}x}+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 9e^{-\frac{1}{2}x} + 1 \leqslant 2$ car la fonction inverse décroit sur $]0; +\infty[$

$\Leftrightarrow 9e^{-\frac{1}{2}x} \leqslant 1$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x} \leqslant \dfrac{1}{9}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x \leqslant -\ln(9)$ car la fonction ln croit sur $]0; +\infty[$

$\Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{-\ln(9)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ car $-\dfrac{1}{2} < 0$

$\Leftrightarrow x \geqslant 2\ln(9)$ et $2\ln(9) \approx 4,4$ à 10^{-1} près $\approx \boxed{5}$

Donc $\boxed{x \geqslant 5}$

Donc le nombre de foyers avec un tel équipement dépassera 5 millions au bout de 5 ans, soit en <u>2010</u> (car $x = 0$ en 2005)

Oui

Exercice V

91 (1) f est une fonction dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$.
Pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)\times f(y)$.
(2) Pour tout réel x, $f(x)=f(x)\times f(0)$.
(3) f n'est pas la fonction nulle donc il existe un réel c tel que $f(c)\neq 0$. En appliquant (2) pour $x=c$, il vient $f(0)=\dfrac{f(c)}{f(c)}=1$.
(4) • $g(y)=f(x+y)$ donc $g'(y)=1\times f'(x+y)$
• $g(y)=f(x)\times f(y)$ donc $g'(y)=f(x)\times f'(y)$
(5) D'après (4), pour tous réels x et y, $f'(x+y)=f(x)\times f'(y)$ donc, en particulier, pour $y=0$, $f'=f\times f'(0)$.

(6) D'après (5), f est solution de l'équation différentielle $y'=ay$ avec $a=f'(0)$.
(7) Ainsi, pour tout réel x, il existe un réel k tel que $f(x)=ke^{ax}$.
Or $f(0)=1$, ainsi $ke^0=1$ soit $k=1$.
Donc, pour tout réel x, $f(x)=e^{ax}$.

Exercice VI

Ex V :

Ex 129 p 396 :

a) Cylindre de rayon 1m.

$\mathcal{A}_{cylindre} = \pi r^2$

Donc $\mathcal{A}_{cylindre} = \pi \times 1^2$

$\mathcal{A} = \pi$

La valeur de A est π ($\simeq 3,14$)

b) $Ah' = -k\sqrt{h}$ (d'après l'énoncé)

et $k = 0,025$.

Donc $Ah'(t) = -k\sqrt{h(t)}$

$\pi h'(t) = -0,025\sqrt{h(t)}$

$\pi \times \frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = -0,025$

$\Leftrightarrow \frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = \frac{-0,025}{\pi}$

c) On cherche à primitiver

$\frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{-0,025}{\pi}$

donc $2\sqrt{h(t)} = \frac{-0,025t}{\pi} \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{h(t)} = \frac{-0,025t}{2\pi}}$

d) $(\sqrt{h(t)})^2 = h(t)$

Donc : $\left(\frac{-0,025t}{2\pi} + C\right)^2 = h(t)$

$h(t) = \left(\frac{-k(t)}{2\pi} + C\right)^2$

e) A $t=0$ le réservoir contient 4m d'eau

Donc $h(0) = 4 \Leftrightarrow h(0) = \left(\frac{-0,025 \times 0}{2\pi} + C\right)^2 = 4$

$h(0) = (0+C)^2 = 4$

$C^2 = 4$

$\sqrt{C^2} = \sqrt{4} = 2$ ou $-2 = c$

Donc $\underline{C = 2}$ (on prend la valeur positive).

retour ?

Ensuite, on cherche $h(t) = 0$

Donc $\dfrac{-0{,}025t}{2\pi} + 2 = 0$

$\dfrac{-0{,}025t}{2\pi} = -2$

$-0{,}025t = -4\pi$

$t = \dfrac{4\pi}{0{,}025} \simeq \underline{503}$ secondes.

Le réservoir arrête de se vider au bout de 503 secondes.

Oui

Exercice VII

115 f_1 est solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathbf{E_1})$ donc il existe une constante réelle k_1 telle que pour tout réel x, $f_1(x) = k_1 e^{2x}$.

f_2 est solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathbf{E_2})$ donc il existe une constante réelle k_2 telle que pour tout réel x, $f_2(x) = k_2 e^{x}$.

D'après le graphique, $f'_1(0) + f'_2(0) = 1$, ainsi $k_1 + k_2 = 1$.

De plus, la droite d admet pour coefficient directeur 3, donc $f_1'(0) + f_2'(0) = 3$, ainsi $2k_1 + k_2 = 3$.

On en déduit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \quad (\ell_1) \\ 2k_1 + k_2 = 3 \quad (\ell_2) \end{cases}$$

$(\ell_2 - \ell_1)$ donne $k_1 = 2$ et donc $k_2 = -1$.

On en déduit que, pour tout réel x, $f(x) = 2e^{2x} - e^{x}$.

Exercice VIII

1. a. $y = f'(x_0)\,x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$.

Dans l'équation précédente, $x = 0$ équivaut à $y = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$.

2. a. f vérifie la condition posée si et seulement si $f(x_0) - y_N = k$, ce qui équivaut à $x_0 f'(x_0) = k$, soit à $f'(x_0) = \frac{k}{x_0}$, si et seulement si f vérifie l'équation $y' = \frac{k}{x}$.

b. Les fonctions solutions sont de la forme $x \longmapsto k\ln(x) + C$, où C est un réel.

Pour $k = \frac{1}{2}$, la fonction f telle que $f(1) = 0$ a pour expression $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x)$.