Exercice I

x	-3		-1		2		5		7
Variation de h	-2	↗	-1	↘	-4	↗	4	↘	0

① $h(0) < h(1)$ est une affirmation FAUSSE !
En effet, h décroît sur $[-1;2]$, donc h décroît aussi sur $[0;1]$.
Or $0 < 1$ et h décroît sur $[0;1]$, donc $h(0) > h(1)$.

② $h(4) > h(6)$: le tableau donné ne permet pas de conclure !
$h(4) \in [-4;4]$ et $h(6) \in [0;4]$: impossible de comparer $h(4)$ et $h(6)$.

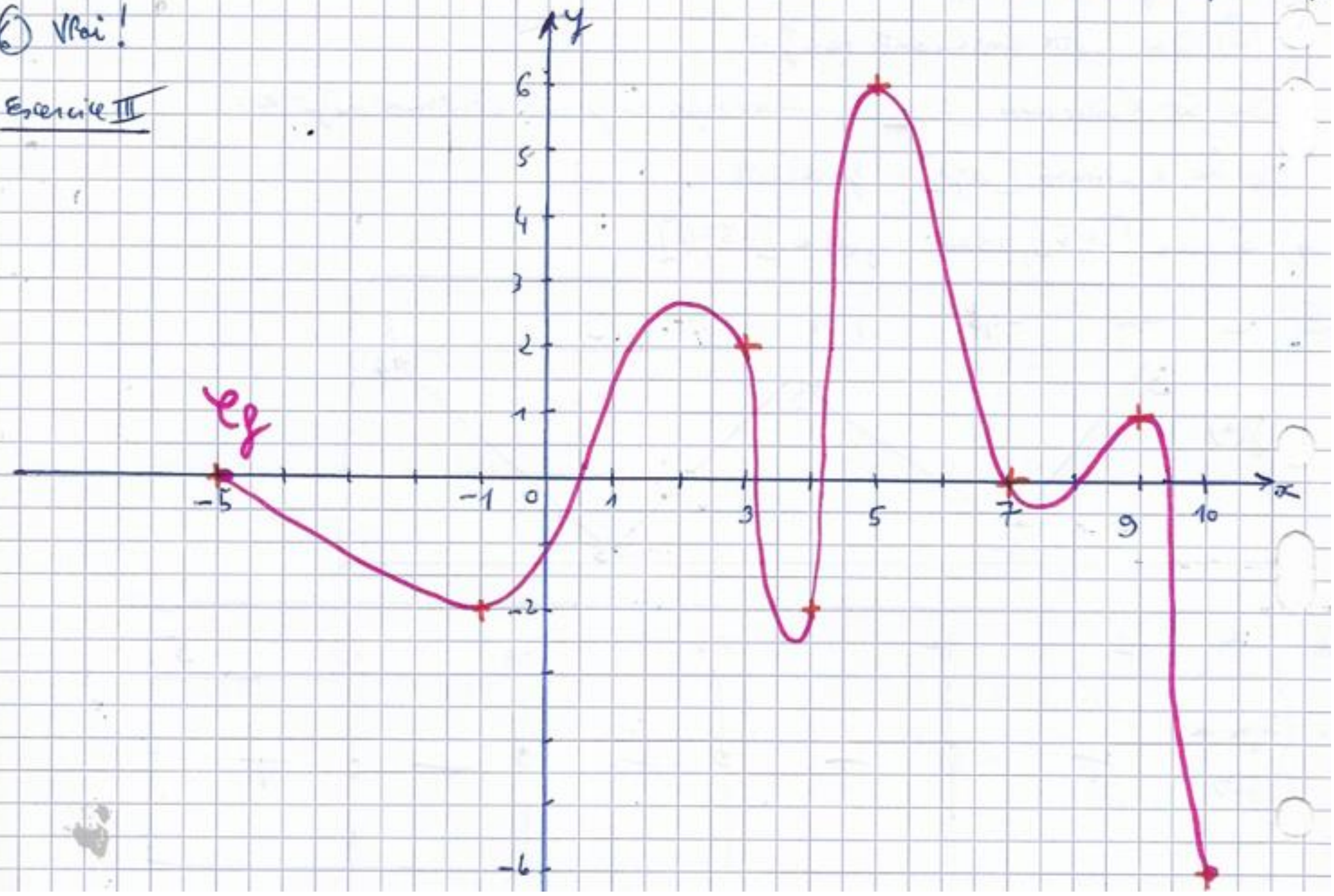
③ $h(-2) < h(2)$: Faux car $h(2) = -4$ et $h(-2) \in [-2;-1]$ car $-3 < -2 < 1$ donc $h(-3) < h(-2) < h(...)$ car h croît sur $[-3;1]$.
Donc $h(-2) \geqslant -2$ et par suite, $h(-2) \neq -4$.

④ $h(0,5) = h(1,5)$: Pas assez de renseignements ds le tableau pour pouvoir l'affirmer !!

⑤ Faux : le maximum de h sur $[-3;7]$ est égal à 4 (et ce dernier est atteint lorsque $x = 5$)

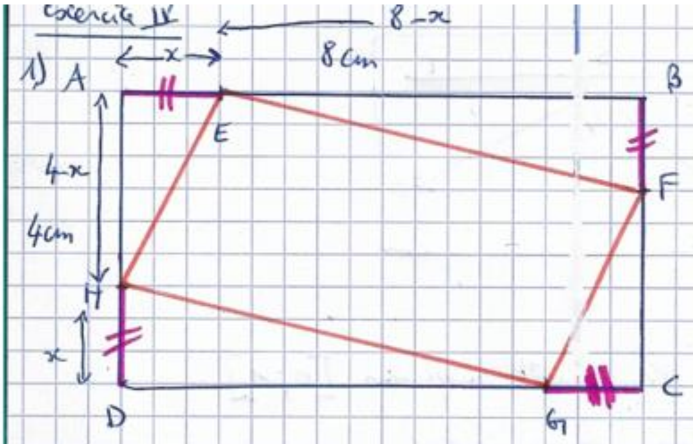
⑥ Vrai !

Exercice III



exercice IV

1)



$AE = BF = CG = DH = x$.

2a) On doit avoir : $0 \leq x \leq 4$ et $0 \leq x \leq 8$

donc $0 \leq x \leq 4$: $\underline{x \in [0;4]}$.

On pose $\underline{I = [0;4]}$.

2b) $f(x) = \text{aire}(EFGH) = \text{aire}(ABCD) - \left(\text{aire}(AEH) + \text{aire}(EBF) + \text{aire}(FCG) + \text{aire}(DHG)\right)$.

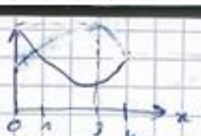
Les triangles AEH et FCG sont identiques et $\text{aire}(AEH) = \text{aire}(FCG) = \dfrac{x(4-x)}{2}$

Les triangles EBF et DHG sont identiques et $\text{aire}(EBF) = \text{aire}(DHG) = \dfrac{x(8-x)}{2}$

$f(x) = 8 \times 4 - \left(2 \times \dfrac{x(4-x)}{2} + 2 \times \dfrac{x(8-x)}{2}\right) = 32 - \left(x(4-x) + x(8-x)\right)$

$\boxed{f(x)} = 32 - (4x - x^2 + 8x - x^2) = 32 - (-2x^2 + 12x) = \boxed{2x^2 - 12x + 32}$ (cm²).

c) Sur $[0;4]$, grâce à une calculatrice :



Conjecture : le minimum de f sur $[0;4]$ semble être égal à 14 et atteint lorsque $x = 3$.

d) Pour tout réel x appartenant à $[0;4]$:

$f(x) - f(3) = 2x^2 - 12x + 32 - 14 = 2x^2 - 12x + 18 = 2(\underline{x^2 - 6x + 9}) = 2\underline{(x-3)}^2$

IR n°2.

Or, $(x-3)^2 \geq 0$ et $2 > 0$, donc, $2(x-3)^2 \geq 0$.

Par suite, pour tout réel x appartenant à $[0;4]$, $f(x) - f(3) \geq 0$, donc $f(x) \geq f(3)$.

f admet donc un minimum sur $[0;4]$ atteint lorsque $x = 3$ et égal à $f(3) = 14$.

Lorsque $x = 3$ cm, l'aire de EFGH est minimale, et égale à 14 cm².

Exercice IV

a) $\Omega = \{B ; V\}$ où B désigne l'évènement obtenir une boule bleue et V obtenir une boule verte.

b) $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

c) $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ (écart minimal : $2-1=1$; écart maximal : $10-1=9$).

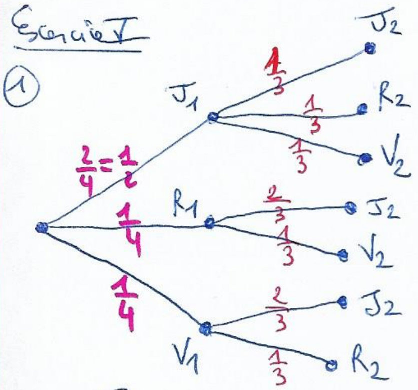
d) $\Omega = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

e) $\Omega = \{3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19\}$. $\rightarrow$ Ω se note : $[\![3;19]\!]$

f) $\Omega = \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19;20\}$ $\rightarrow$ Ω se note : $[\![2;20]\!]$.

Exercice V

1)



⚠ Pas de remise ici !

2) Il y a donc $\boxed{7}$ issues possibles ici.

3) $\boxed{P(R) = \frac{1}{4}}$; $P(J) = \underbrace{P(J_1 \cap J_2)} + \underbrace{P(R_1 \cap J_2)} + \underbrace{P(V_1 \cap J_2)}$

$P(J) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

$\boxed{P(J)} = \frac{1}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) $R \cap J$ = « Piocher un jeton rouge en 1er et un jeton jaune en second ».

$P(R \cap J) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ (arbre !)

c) $\boxed{P(R \cup J)} = P(R) + P(J) - P(R \cap J) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{6}{12} - \frac{2}{12} = \boxed{\frac{7}{12}}$

4) a) $N = (R_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap R_2)$

$P(N) = \underbrace{P(R_1 \cap V_2)} + \underbrace{P(V_1 \cap R_2)}$

$\boxed{P(N)} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}$

b) $\overline{N}$ = « au moins un des deux jetons tirés est jaune ».

$\boxed{P(\overline{N})} = 1 - P(N) = 1 - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}$

Exercice VI

1) $E = A \cap B$

$F = A \cup B$

$G = \overline{A} \cap \overline{B}$

$H = A \cap \overline{B}$

$I = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

2) D'après l'énoncé $p(F) = 1$ car au moins un des deux distributeurs fonctionne !

$p(G) = 0$ car G est un événement impossible.

Enfin $p(F) = 1 = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Donc : $1 = 0{,}8 + 0{,}6 - p(A \cap B)$ donc $p(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}6 - 1 = 0{,}4$.

3) C'est faux : prenons pour contre-exemple celui de la question 2) :

$p(A \cap B) = 0{,}4$ tandis que $p(A) \times p(B) = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$.

Or $0{,}4 \neq 0{,}48$, donc $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$: l'affirmation énoncée est donc fausse !

Exercice VII

a) Il y a $10^4 = 10000$ codes différents possibles.

b) $p = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$ car un seul cas favorable "1234" sur les 10000 qui s'offrent à nous.

c) Pour chacun des quatre chiffres à taper on a 5 choix possibles : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.

Donc d'après le principe multiplicatif, il y a $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ codes contenant que des chiffres pairs.

Donc $p' = \frac{625}{10.000} = 0{,}0625$ est la probabilité de taper un code ne contenant que des chiffres pairs.

d) C'est $p'' = 1 - p' = 1 - 0{,}0625 = 0{,}9375$ vu que l'événement "Au moins un chiffre impair" est l'événement contraire de "taper un code ne contenant que des chiffres pairs".

e) Notons C l'événement : "le code se termine par 5".

H l'événement : "le code se termine par 8".

On cherche $p(C \cup H)$.

Or, $\overline{C \cup H} = \overline{C} \cap \overline{H}$ = "Codes ne finissant ni par 5, ni par 8" : Il y a $10 \times 10 \times 10 \times 8$ tels codes

$p(\overline{C} \cap \overline{H}) = \frac{8000}{10000} = 0{,}8$.

10000

donc $p(C \cup H) = 1 - p(\overline{C \cup H}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Rq : Ici, l'indication n'était pas utile ! C et H sont incompatibles, donc $p(C \cup H) = p(C) + p(H)$ avec de façon triviale, $p(C) = p(H) = 0{,}1$

8)

8 choix 8 choix 8 choix 4 choix (2 ; 4 ; 6 ou 8).

Il y a donc $N = 8 \times 8 \times 8 \times 4 = 2048$. cas favorables à la réalisation de cet événement.

Donc la probabilité de cet événement est $p'' = \dfrac{2048}{10000} = 0{,}2048$.

g) Pour taper un code comportant 3 chiffres identiques, il faut :

① Choisir un entier entre 0 et 9 (10 choix possibles) pour le chiffre répété.

② Positionner les trois chiffres répétés parmi les 4 positions (par exemple, si le chiffre répété est le 3, il y aura quatre possibilités : 333* ; 33*3 ; 3*33 , *333

③ Choisir enfin un chiffre distinct de celui répété, ce qui offre 9 possibilités.

Il y a donc $N = 10 \times 4 \times 9 = 360$ codes comportant exactement trois chiffres identiques.

En suite, la probabilité de taper un code ayant exactement trois chiffres identiques est :

$\tilde{p} = \dfrac{360}{10.000} = 0{,}036$

h) C'est $\tilde{\tilde{p}} = \dfrac{10}{10000} = 0{,}001$ car il n'y a que 10 cas favorables 0000 ; - - - ; 9999 sur un total de 10000 (équiprobabilité).

<u>Exercice VIII</u>

Nommons A, B, C et D les cadeaux provenant respectivement de chacun des quatre amis.

On note : $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & B & A \end{pmatrix}$ pour dire que : A reçoit le cadeau de C, B reçoit celui de D, C reçoit celui de B et enfin D reçoit celui de A.

A partir de là, en tenant compte du fait que chaque personne ne reçoit et n'offre qu'un seul cadeau, on peut voir qu'il y a 24 possibilités de distribution des cadeaux (4 choix possibles pour A, 3 choix pour B, 2 choix pour C et un choix pour D) et que parmi celles-ci :

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & A & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & A & D & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & B & A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & A & B \end{pmatrix}$$

Il y a donc 9 tirages pour lesquels aucune personne ne récupère son propre cadeau.

Par suite, la probabilité de l'événement cherché est : $p = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$.