Correction de la session blanche 2023

Exercice n°1 :

Partie 1

1. D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
   - la fonction f' est positive sur $]-\infty\ ;\ -1[$ donc la fonction f est croissante sur $]-\infty\ ;\ -1[$;
   - la fonction f' est négative sur $]-1\ ;\ +\infty[$ donc la fonction f est décroissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
2. D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
   - la fonction f' est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle ;
   - la fonction f' est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} + 2\mathrm{e}^{-x}$.

   D'après le cours : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$.
   De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, comme asymptote horizontale en $+\infty$.
   On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = (1 - x - 2)\mathrm{e}^{-x} = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$; donc $f'(x)$ s'annule et change de signe en $x = -1$.
   $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$; on établit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

   c. Sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$, f est continue (car dérivable) et est strictement croissante à valeurs dans $[0\ ;\ \mathrm{e}]$.

   Or $2 \in [0\ ;\ \mathrm{e}]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$.

   À l'aide de la calculatrice, $\alpha \approx -1{,}6$.

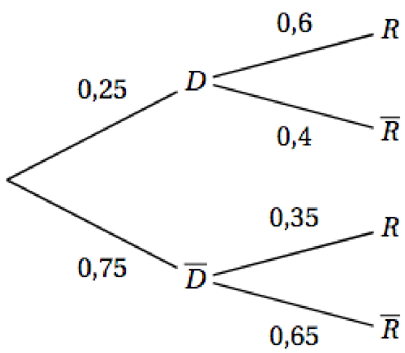
3. $f''(x) = (-1) \times e^{-x} + (-x-1) \times (-1)e^{-x} = (-1+x+1)e^{-x} = xe^{-x}$

$e^{-x} > 0$ pour tout x, donc $f''(x)$ est du signe de x.

- Sur $]-\infty\,;\,0[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.
- Sur $]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.
- En $x = 0$, la dérivée seconde s'annule et change de signe donc le point A d'abscisse 0 de $\mathscr{C}$ est le point d'inflexion de cette courbe.

Exercice n°2 :

1. a.



b. $p(\overline{D} \cap R) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(R) = 0,75 \times 0,35 = 0,2625$.

c. On a de même $p(D \cap R) = p(D) \times p_D(R) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(R) = p(D \cap R) + p(\overline{D} \cap R) = 0,15 + 0,2625 = 0,4125$.

d. Il faut trouver $p_R(\overline{D}) = \dfrac{p(R \cap \overline{D})}{p(R)} = \dfrac{0,2625}{0,4125} \approx 0,6364$, soit 0,64 au centième près.

2. a. Les tirs sont indépendants et à chaque tir la probabilité de le réussir est égale à 0,35 : la variable aléatoire X égale au nombre de réussites suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$.

b. $P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,35^3 \times (1 - 0,35)^7 \approx 0,25$

c. À l'aide de la calculatrice, $P(X \leq 6) \approx 0,97$.

d. $P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - P(X \leq 5)$.

À l'aide de la calculatrice, $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0,0949$ soit 0,09 au centième près.

3. Soit n un entier naturel non nul.

Stéphanie réalise une série de n tirs à trois points, les tirs sont indépendants et à chaque tir la probabilité de le réussir est égale à 0,35.

Soit X_n La variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis, X_n suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;0,35)$.

a. $P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,35^0 \times (1 - 0,35)^n = 1 - 0,65^n$

b. À l'aide de la calculatrice, $1 - 0,65^{10} \approx 0,987$ et $1 - 0,65^{11} \approx 0,991$.

La valeur minimale de n pour que la probabilité que Stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à 0,99 est donc n = 11.

Exercice n°3 :

- **QUESTION 1 : réponse B**

Résoudre les systèmes pour les différents points.
Par exemple pour le premier point,

$\begin{cases} -2 = -4 + 3t \\ 3 = 6 - 3t \\ 4 = 8 - 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$ donc ce point n'appartient pas à la droite.

Idem avec les autres.

- **QUESTION 2 : réponse C**

$$\begin{cases} -2 = -4 + 3t \\ 3 = 6 - 3t \\ 4 = 8 - 6t \end{cases}$$

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

- **QUESTION 3 : réponse D**

On prend comme vecteur directeur de la droite : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 1-3 \\ -2-2 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

On prend comme point A(1 ; 1 ; -2)

D'où

$\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 1 - 2t' \\ z = -2 - 4t' \end{cases}$, t' ∈ ℝ

- **QUESTION 4 : réponse D**

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont tels que $\vec{u} = 1{,}5\overrightarrow{u'}$ donc d et d' sont parallèles (au sens large).

d passe par A(1 ;1 ;-2), donc testons si ce point appartient ou pas à d' en résolvant le système : $\begin{matrix} 1 = -4 + 3t \\ 1 = 6 - 3t \\ -2 = 8 - 6t \end{matrix}$

La résolution de ce dernier conduit sans peine à : t = $\frac{5}{3}$ *pour chacune des trois équations*. Donc ce système est compatible, et A appartient bien à d' (c'est le point de paramètre 5/3 de d').

Donc les deux droites sont confondues car parallèles et ayant un point en commun.

- **QUESTION 5 : réponse A**

$$\begin{cases} -2 \times 1 - 1{,}5 \times (-2) = 1 \\ -2 \times (-1) - 1{,}5 \times (-2) = 5 \\ -2 \times 3 - 1{,}5 \times 1 = -7{,}5 \end{cases}$$

- **QUESTION 6 : réponse B**

Le milieu de [FG] a pour coordonnées (0,5 ; 1 ; 1)

- **QUESTION 7 : réponse D**

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

D'où $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

- **QUESTION 8 : réponse C**

$$f(x) = \frac{e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})}$$

D'où $f(x) = \frac{(1-e^{-2x})}{(1+e^{-2x})}$

D'où la limite de f(x) en +∞ est 1
La courbe de f admet une asymptote en +∞ d'équation y = 1

Exercice n° 4 :

I – Premier modèle

En 10 minutes la température a augmenté de $1,3-(-19) = 1,3+19 = 20,3$ soit une augmentation de $2,03$ °C.
Selon ce premier modèle l'augmentation de la température serait au bout de 25 minutes de $25 \times 2,03 = 50,75$ (°C).
Les gâteaux seraient donc à une température de $-19+50,75 = 31,75$(°C) alors que la température ambiante est de 25 °C : c'est impossible, donc ce modèle n'est pas pertinent.

II – Second modèle

1. On a $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25) \iff T_{n+1} - T_n = -0,06T_n + 1,5 \iff T_{n+1} = T_n - 0,06T_n + 1,5 \iff T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.
2. • Avec $n = 0$, la relation précédente donne $T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = 1,5 - 17,86 = -16,36$;
   • Avec $n = 1$, la relation précédente donne $T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5 = 1,5 - 15,3784 = -13,8784$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{P}(n)$ la propriété : $T_n \leqslant 25$.

Initialisation : T_0 = -19 et -19 $\leqslant 25$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé.

On suppose que pour cet entier là $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que : $T_n \leqslant 25$.

Montrons alors sous cette hypothèse que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que $T_{n+1} \leqslant 25$.

Or par hypothèse de récurrence, $T_n \leqslant 25$, donc $0,94T_n \leqslant 25 \times 0,94$ (car 0,94 > 0), donc $0,94T_n + 1,5 \leqslant 25 \times 0,94 + 1,5$ donc $T_{n+1} \leqslant 23,5 + 1,5$ donc $T_{n+1} \leqslant 25$: $\mathrm{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leqslant 25$.

Ceci correspond à une évidence : la température des gâteaux ne peut dépasser la température ambiante.

4. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$.

D'après la question précédente $T_n \leqslant 25$ soit en multipliant par 0,06 :

$0,06T_n \leqslant 0,06 \times 25$, ou $0,06T_n \leqslant 1,5$

et en prenant les opposés : $-1,5 \leqslant -0,06T_n$ et enfin en ajoutant à chaque membre 1,5 :

$0 \leqslant -0,6T_n + 1,5$.

On a donc démontré que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n \geqslant 0$: la suite (T_n) est donc croissante.

5. On a donc démontré que la suite (T_n) est croissante et majorée par 25 : elle converge donc vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 25$.

6. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.

a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94T_n + 1,5 - 25$ ou encore $U_{n+1} = 0,94T_n - 23,5 = 0,94\left(T_n - \dfrac{23,5}{0,94}\right) = 0,94(T_n - 25)$, soit finalement $T_{n+1} = 0,94U_n$:cette égalité montre que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,94 et de premier terme $U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$.

b. On sait que quel soit $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times 0,94^n$ ou $U_n = -44 \times 0,94^n$.
Or $U_n = T_n - 25 \iff T_n = U_n + 25$ ou encore $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$, soit finalement :

$$T_n = 25 - 44 \times 0,94^n, \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}$$

c. Comme $0 < 0,94 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,94^n = 0$, d'où par somme de limites :

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = \ell = 25.$$

7. **a.** On a $T_{25} = 25 - 44 \times 0,97^{25} \approx 15,632$ soit environ 16°C.

b. La calculatrice donne $T_{17} \approx 9,63$ et $T_{18} \approx 10,55$, donc Cécile devra déguster son gâteau entre la 17ᵉ et la 18ᵉ minute après sa sortie.