Terminale Maths Groupe 2 **Corrigé du DM9** **Janvier 2023**

Exercice I

0. (C1) représente la courbe de l'exponentielle car ne prend que des valeurs positives, tandis que (C2) représente la courbe de la fonction trinôme, qui elle ne prend que des valeurs négatives ($-x^2-1 < 0$).

... graduations successives.

On considère les deux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.

1. Lecture graphique de l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_1)$: $a \simeq 0,8$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_2)$: $b \simeq -1,2$.

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et par B le point d'abscisse b de la courbe $(\mathscr{C}_2)$.
   On a alors : $A\,(a; e^a)$ et $B\left(b; -b^2-1\right)$.
   (a) Équation de la tangente $(\mathscr{T}_A)$ à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ au point A :
   $$y - e^a = e^a(x-a) \Longleftrightarrow y = e^a x + e^a(1-a)$$
   (b) Équation de la tangente $(\mathscr{T}_B)$ à la courbe $(\mathscr{C}_2)$ au point B :
   $$y - (-b^2-1) = -2b(x-b) \Longleftrightarrow y = (-2b)x + b^2 - 1$$
   (c) $(\mathscr{T}_A) = (\mathscr{T}_B)$. En identifiant terme à terme les deux équations, on obtient :
   $$(\mathscr{T}_A) = (\mathscr{T}_B) \Longleftrightarrow (S) : \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a(1-a) = b^2 - 1 \end{cases}$$
   (d) Montrer que le système (S) est équivalent au système (S′) :
   $$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{e^a}{2} \\ e^a(1-a) = \left(-\frac{e^a}{2}\right)^2 - 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{e^a}{2} \\ 4e^a(1-a) = (e^a)^2 - 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^a & = & -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 & = & 0 \end{cases}$$

3. (E) : $e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0$.
   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$.
   (a) Sur $]-\infty\,;\,0[$, la fonction $x \to e^{2x}$ est croissante et strictement positive, donc :
   $$\left(e^{2x} \leqslant e^{2\times 0} = 1 < 4 \Longrightarrow e^{2x} - 4 < 0\right) \text{ et } \left(x \in]-\infty\,;\,0[\Longleftrightarrow x < 0 \Longleftrightarrow x - 1 < -1 < 0 \Longrightarrow 4e^x(x-1) < 0\right)$$
   (b) L'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$, car sur cet intervalle, $e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 < 0$.
   (c) La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, car sa dérivée est positive :
   $$f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x + 4xe^x - 4e^x = 2e^{2x} + 4xe^x > 0 \text{ (somme de nombres strictement positifs)}$$

(d) Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. En effet :

$$f(0) = -7 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1+4\frac{x}{e^x}-\frac{4}{e^x}-\frac{4}{e^{2x}}\right) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^{nx}} = 0 \ (n=1 \text{ ou } 2)$$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$; elle réalise donc une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ sur $[-3\,;\,+\infty[$.

Or $0 \in [-3\,;\,+\infty[$, donc 0 possède un unique antécédent, noté a vérifiant $f(a) = 0$.

Encadrement d'amplitude 10^{-2} de a (en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires) :

$$f(0,84) \simeq -0,117 \text{ et } f(0,85) \simeq 0,07 \Longrightarrow 0,84 \leqslant a \leqslant 0,85$$

4. On prend pour A le point d'abscisse a. Encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites $(\mathcal{T}_A)$ et $(\mathcal{T}_B)$ sont confondues :

$$0,84 \leqslant a \leqslant 0,85 \Longleftrightarrow 2,31 < e^{0,84} \leqslant e^a \leqslant e^{0,85} < 2,34 \Longleftrightarrow 1,155 \leqslant \frac{e^x}{2} \leqslant 1,17 \Longleftrightarrow -1,2 \leqslant b = -\frac{e^x}{2} \leqslant -1,1$$

Exercice II

1a) $A(1;2;3)$ $B(-1;4;5)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-1-1=-2\\4-2=2\\5-3=2\end{pmatrix}$ dirige (AB), donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige également (AB) car $\vec{AB}=2\vec{u}$.

Rq : essayez, si possible, de prendre un vecteur directeur dont les coordonnées sont "les plus petites" possible.

Une R-P de (AB) dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et passant par $A(1;2;3)$ est donc : $\begin{cases}x=1+(-1)t\\y=2+1t\\z=3+1t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

En simplifiant, une R-P de (AB) est donc : $\boxed{\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}, t\in\mathbb{R}}$

1b) Soit (Δ) la droite passant par $C(0;0;11)$ et parallèle à (AB) : Vu que $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige (AB) et que $(AB)\parallel(\Delta)$, $\vec{u}$ dirige également (Δ), de sorte que, une R-P de la droite (Δ) est donc : $\boxed{\begin{cases}x=0-t'=-t'\\y=0+t'=t'\\z=11+t'\end{cases}, t'\in\mathbb{R}}$.

② $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}0-1=-1\\0-2=-2\\11-3=8\end{pmatrix}$. Or $\frac{-2}{-1}=2$ et $\frac{2}{-2}=-1$. Vu que $2\neq-1$ il en résulte que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles, et à ce titre, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés et forment donc un unique plan, le plan (ABC).

③ $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ dirige (AB) et $\vec{CD}\begin{pmatrix}3-0=3\\0-0=0\\1-11=-10\end{pmatrix}$ dirige (CD).

$\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont non colinéaires car $\frac{3}{-2}\neq\frac{0}{2}$, donc (AB) et (CD) ne sont ni parallèles, ni confondues.

Étudions l'intersection de (AB) et (CD), en commençant par donner une R-P de (CD) :

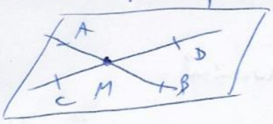
$\vec{CD}\begin{pmatrix}3\\0\\-10\end{pmatrix}$ dirige (CD) et (CD) passe par $C(0;0;11)$, donc une R-P de (CD) est $\boxed{\begin{cases}x=0+3s=3s\\y=0+0s=0\\z=11-10s\end{cases}, s\in\mathbb{R}}$

$M(x;y;z)\in(AB)\cap(CD)\iff\exists t\in\mathbb{R}, \exists s\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}x=1-t=3s\\y=2+t=0\\z=3+t=11-10s\end{cases}\iff\begin{cases}t=-2\\1-(-2)=3s\\3-2=11-10s\end{cases}$

$\iff\begin{cases}t=-2\\s=\frac{3}{3}=1\\1=11-10\times1 : 1=1 \therefore \text{système compatible!}\end{cases}$

Par suite, $\begin{cases}x=1-t=1-(-2)=3\\y=0\\z=3+t=3+(-2)=1\end{cases}$, donc $M(3;0;1)$ est le point d'intersection des droites (AB) et (CD) qui sont donc sécantes en ce point M.

On en déduit que les points A, B, C et D sont COPLANAIRES car deux droites sécantes sont coplanaires.



④ ACBE est un pgm $\iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$

Soit $E(x;y;z)$: $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}-1-x\\4-y\\5-z\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB} \iff \begin{cases}-1=-1-x\\-2=4-y\\8=5-z\end{cases}$

2 vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées.

$\iff \begin{cases}x=0\\y=4+2=6\\z=5-8=-3\end{cases}$. Donc $E(0;6;-3)$ et ACBE est un pgm.

Soit K le centre de ACBE. K est le point d'intersection des diagonales $[AB]$ et $[CE]$ de ce pgm. Or un pgm a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, donc $K =$ Milieu de $[AB]$.

Par suite, $K\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$, $K\left(\frac{1+(-1)}{2};\frac{2+4}{2};\frac{3+5}{2}\right)$, $\boxed{K(0;3;4)}$

⑤ $F(-4;4;15)$ et $A(1;2;3)$, donc $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-4-1=-5\\4-2=2\\15-3=12\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\8\end{pmatrix}$ (déjà vu q. précédentes).

Donc, $a\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2a\\2a\\2a\end{pmatrix}$ et $b\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-b\\-2b\\8b\end{pmatrix}$, donc $a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2a-b\\2a-2b\\2a+8b\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AF} = a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases}-5=-2a-b\\2=2a-2b\\12=2a+8b\end{cases} \iff \begin{cases}b=-2a+5\\2=2a-2(-2a+5)=6a-10\\12=2a+8(-2a+5)=-14a+40\end{cases}$

$\iff \begin{cases}b=-2a+5\\6a=12\\14a=20-12=28\end{cases} \iff \begin{cases}a=2\\a=2\\b=-2\times2+5=1\end{cases}$ système compatible !

Donc $\boxed{\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$ Vu que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires (cf. ②), $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est une base du plan (ABC). Comme $\overrightarrow{AF}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, il en résulte que les quatre points A, B, C et F sont COPLANAIRES (i.e) $\boxed{F\in(ABC)}$.

⑥ Par simple lecture sur la R-P de $\mathcal{D}$ on peut dire que : $\mathcal{D}$ passe par $P(2;3;1)$ et $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$. Autre caractérisation : $\mathcal{D}$ est la droite passant par $P(2;3;1)$ et $Z(5;0;7)$

$\lambda=3$ dans la R-P.

⑦ On cherche s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}0,4=2+\lambda\\2,5=3-\lambda\\1=1+2\lambda\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=0,4-2=-1,6\\\lambda=3-2,5=0,5\end{cases}$ système incompatible !

Donc $\boxed{W(0,4;2,5;1)\notin(\mathcal{D})}$

De même, existe-t-il $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}-9=2+\lambda\\14=3-\lambda\\-21=1+2\lambda\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=-9-2=-11\\\lambda=3-14=-11\\\lambda=\frac{-21-1}{2}=-11\end{cases}$ système compatible ! $\boxed{L(-9;14;-21)\in\mathcal{D}}$

Exercice III

53 **a)** $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ définit le plan (ABC). Or K est un point de (CD), donc est dans le plan (ABC) : il existe donc deux réels x, y tels que $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CA} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

donc $x = \frac{1}{5}$ et $y = 1$.

100 **1. a)** $\overrightarrow{AB}\left(-3 ; -\frac{3}{2} ; -\frac{9}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(1 ; \frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C définissent un plan.

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan.

2. $\overrightarrow{EF}\left(-1 ; -\frac{3}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$.

On remarque que $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires. Par conséquent la droite (EF) est parallèle au plan (ABC).

49 **a)** $\vec{u}(-1;2;1)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{u}'(1;-1;-2)$ est un vecteur directeur de d'.

b) Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas proportionnelles donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites d et d' ne sont pas parallèles.

Les droites d et d' peuvent être sécantes ou non coplanaires.

c) On résout le système :

$$\begin{cases} 1-t=2+t' \\ 2+2t=-2-t' \\ -1+t=-2t' \end{cases} \text{ qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} t+t'=-1 \\ 2t+t'=-4 \\ t+2t'=1 \end{cases} \text{ ainsi } \begin{cases} t'=2 \\ t=-3 \end{cases}$$

On remplace t dans la représentation paramétrique de d et on obtient :

$$\begin{cases} x=4 \\ y=-4 \\ z=-4 \end{cases}$$

Le point d'intersection de d et d' a pour coordonnées $(4\,;-4\,;-4)$.

53 $\vec{u}(3\,;1;-1)$ est un vecteur directeur de d.

$\vec{u}'(1;1;-1)$ est un vecteur directeur de d'.

Or $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires donc d et d' ne sont pas parallèles.

On résout le système :

$$\begin{cases} 3t = 1 + t' \\ -1 + t = t' \\ 2 - t = 3 - t' \end{cases} \quad \text{qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} 3t - t' = 1 \\ t - t' = 1 \\ t - t' = -1 \end{cases}$$

Ce qui est impossible.

Ainsi, d et d' ne sont ni parallèles, ni sécantes donc elles sont non coplanaires.

Exercice IV

1) Réponse **C.**
2) Réponse **D.**
3) Réponse **A.**
4) Réponse **B.**