« Il y a des choses qui paraissent incroyables à la plupart des personnes qui n'ont pas étudié les mathématiques. » Archimède.

Chapitre IX — Orthogonalité dans l'espace

A-Généralités

Définition

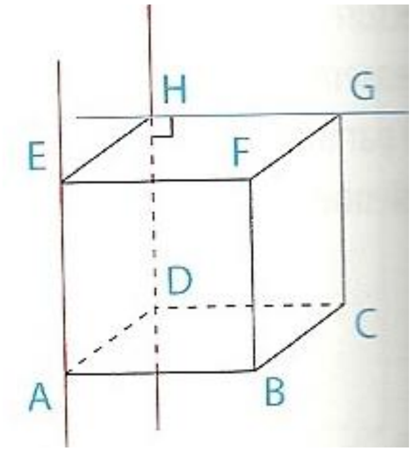
Deux droites de l'espace sont ***orthogonales*** lorsque leurs parallèles respectives menées *d'un point quelconque* de l'espace sont ***perpendiculaires.***

Exemple

Dans le cube ci-contre, (AE) et (GH) sont orthogonales :

Pourquoi ?

Citer d'autres droites orthogonales.



Remarque

Les termes *"perpendiculaires"* et *"orthogonal"* sont souvent confondus : c'est un abus !

En effet, deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes, alors que deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires, et *a fortiori*, pas nécessairement sécantes.

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, sont orthogonaux s'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites orthogonales.

Dans l'exemple précédent, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux.

B) Produit scalaire dans l'espace

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs ***de l'espace***.

Nous allons voir qu'il est licite de parler de produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On va se ramener à la définition du produit scalaire de deux vecteurs situés dans un *MEME PLAN*.

Fixons un point A quelconque de l'espace.
On sait qu'il existe alors un unique point B tel que…………….., et un unique point C tel que …………

Illustration :

Avec ce choix de représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont situés dans un même plan, le plan (ABC).

Définition

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, calculé dans le plan (ABC).

Propriété : Toutes les propriétés du produit scalaires énoncées dans le plan s'étendent à l'espace :

En particulier :

1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, on a la formule bien pratique :

♥♥♥ ♥♥♥

2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\ \vec{v}\ =\ 0$. Cette propriété fondamentale est d'un usage récurrent dans les exercices. On notera $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3) Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ est par définition le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par lui-même : $\vec{u}.\vec{u}$ est noté $\vec{u}^{\,2}$.
Grâce à la formule bien pratique 1), on a donc : $\vec{u}^{\,2}\ =$ ……….

En particulier, pour tous points A et B, ♥♥♥ $\overrightarrow{AB}^{\,2} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$ ♥♥♥

4) Enfin, les règles de calcul du produit scalaire du plan s'étendent à l'espace :
Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace :

$\vec{u}.\vec{v}\ =\ \vec{v}.\vec{u}$ (on dit que le produit scalaire est commutatif).

$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})\ =\ \vec{u}.\vec{v}\ +\ \vec{u}.\vec{w}$. (Distributivité du produit scalaire sur l'addition de vecteurs).

Pour tout réel k, $(k\,\vec{u}).\vec{v}\ =\ \vec{u}.(k\,\vec{v})\ =\ k(\vec{u}.\vec{v})$.

5)

$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 =$

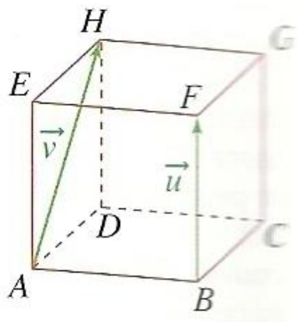
$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 =$

En particulier, on a : $\vec{u}.\vec{v}\ =$ …………………………………….. = ……………………………………….

Ces dernières formules sont appelées formules de polarisation, et expriment le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction des normes des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}\ -\ \vec{v}$.

Preuve : il suffit de considérer un plan (P) tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent des représentants dans (P), et d'appliquer les règles du produit scalaires vues dans le plan en première.

Pour la 5) : $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}.(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}\ \ \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$.



Exemple

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1.

a) Calculer $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{AH}$.

b) En utilisant la décomposition : $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH}$, calculer : $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CG}$.

✂---

Définition

Une base $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$ de l'espace est dite *orthonormée* lorsque les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et de même norme égale à 1 : $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$; $\vec{\imath} \perp \vec{k}$ et $\vec{\jmath} \perp \vec{k}$, et de plus, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Exemple : dans le cube précédent, citer une base orthonormée de l'espace.

Un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$ est la donnée d'un point O de l'espace et d'une base orthonormée $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$.

Nous travaillerons dans toute la suite du chapitre <u>exclusivement dans des repères orthonormés</u>.

<u>Théorème</u> (utile pour le bac)

Si l'espace est muni d'un ***R.O.N*** $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$, et si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors :

1) ♥♥♥ $\vec{u}.\vec{v} =$ $\qquad\qquad =$ ♥♥♥

En particulier, $\|\vec{u}\| =$ (fondamental, à bien retenir).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonaux si et seulement si :

En particulier, deux droites de l'espace respectivement dirigées par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonales si et seulement si :

2) Si $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$, alors :

♥♥♥ $AB =$ ♥♥♥

Preuve

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$, et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ donc : $\vec{v} = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k}$.

*)

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})$$

distributivité du pdt scalaire.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\vec{i}\cdot x'\vec{i})+(x\vec{i})\cdot(y'\vec{j})+(x\vec{i})\cdot(z'\vec{k})+(y\vec{j})\cdot(x'\vec{i})+(y\vec{j})\cdot(y'\vec{j})+(y\vec{j})\cdot(z'\vec{k})$$
$$+(z\vec{k})\cdot(x'\vec{i})+(z\vec{k})\cdot(y'\vec{j})+(z\vec{k})\cdot(z'\vec{k}).$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'(\vec{i}\cdot\vec{i})+(xy')\vec{i}\cdot\vec{j}+(xz')\vec{i}\cdot\vec{k}+yx'(\vec{j}\cdot\vec{i})+(yy')\vec{j}\cdot\vec{j}+(yz')\vec{j}\cdot\vec{k}$$
$$+(zx')\vec{k}\cdot\vec{i}+(zy')\vec{k}\cdot\vec{j}+(zz')(\vec{k}\cdot\vec{k})$$

Or $\vec{i}\perp\vec{j}$, donc $\vec{i}\cdot\vec{j}=0=\vec{j}\cdot\vec{i}$; $\vec{j}\perp\vec{k}$, donc $\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$; $\vec{i}\perp\vec{k}$ donc $\vec{i}\cdot\vec{k}=0=\vec{k}\cdot\vec{i}$.

Par suite :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'\|\vec{i}\|^2+yy'\|\vec{j}\|^2+zz'\|\vec{k}\|^2$ CAR $\vec{i}\cdot\vec{i} = \|\vec{i}\|\times\|\vec{i}\|\times\underbrace{\cos(0)}_{=1}$. Formule du Physicien !

idem pour $\vec{j}\cdot\vec{j}$ et $\vec{k}\cdot\vec{k}$.

$(\vec{i};\vec{i})=0\ [2\pi]$

Donc $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'}$

**)

Faisons $\vec{v}=\vec{u}$:

$\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2+y^2+z^2$ et $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(0) = \|\vec{u}\|^2$

Donc $\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2+z^2$, et comme $\|\vec{u}\|\geq 0$, on a :

$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ #

***)

Posons $\vec{u}=\vec{AB}$: alors $\vec{u}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$ et la relation # conduit au résultat voulu : $\|\vec{u}\| = \|\vec{AB}\| = \boxed{AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$

Exercice 1

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un *R.O.N* de l'espace, et *(d)* et *(d')* les droites qui ont pour représentations paramétriques respectives :

(d) : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 2+t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ et *(d')* : $\begin{cases} x = -1-s \\ y = 5 \\ z = 2+s \end{cases}$ avec $s\in\mathbb{R}$.

Démontrer que *(d)* et *(d')* sont orthogonales.

***Exercice 2* (hyper classique)**

Soit $A(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$, $B(1\ ;\ -1\ ;\ 3)$ et $C(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)$ des points d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire une mesure de $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})$ arrondie au degré près.

✂---

Exercice 3

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arête de longueur a, et I le milieu de $[AB]$.

a) Exprimer, en fonction de a, chacun des produits scalaires : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Par ce procédé, on peut démontrer que les arêtes opposées d'un tétraèdre <u>régulier</u> sont orthogonales.

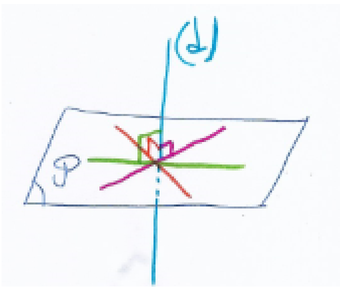
✂---

II – Vecteur normal à un plan

Définition

Une droite (d) est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ lorsqu'elle est orthogonale à ***toutes*** les droites du plan $\mathcal{P}$.

Illustration :



Définition

Soit $(\mathcal{P})$ un plan, et $\vec{n}$ **un vecteur <u>non nul</u>** de l'espace.
On dit que $\vec{n}$ est un <u>vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$</u> s'il est orthogonal à tout vecteur du plan $(\mathcal{P})$.

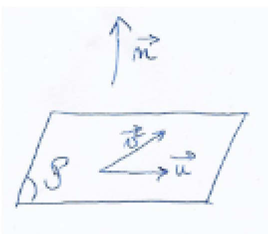
<u>**Propriété**</u>

♥♥

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace, et $(\mathcal{P})$ un plan de l'espace.
$\vec{n}$ est normal au plan $(\mathcal{P})$ **si et seulement si** il est orthogonal à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ <u>non colinéaires</u> de $(\mathcal{P})$.

♥♥

Preuve :



Le sens direct est évident : si $\vec{n}$ est normal au plan $(\mathcal{P})$, alors, par définition, il est orthogonal à tous les vecteurs du plan $(\mathcal{P})$, donc en particulier, il est orthogonal à deux quelconques vecteurs non colinéaires de $(\mathcal{P})$.
Réciproquement, supposons que $\vec{n}$ soit orthogonal à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de $(\mathcal{P})$:
Alors, $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ forme une base de $(\mathcal{P})$ vu que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
Soit $\vec{w}$ un vecteur quelconque du plan $(\mathcal{P})$: vu que $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est une base de $(\mathcal{P})$, $\vec{w}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il existe des réels a et b tels que : $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.
On veut prouver que ***$\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux***, donc ***on calcule naturellement le produit scalaire $\vec{n}.\vec{w}$:***

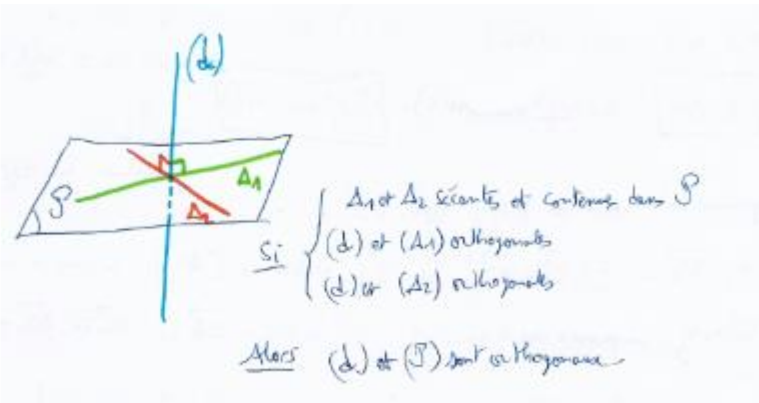
$\vec{n}.\vec{w} = \vec{n}.(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\,\vec{n}.\vec{u} + b\,\vec{n}.\vec{v} = a \times 0 + b\times 0 = 0$ car $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, donc $\vec{n}.\vec{u} = 0$ et de même, $\vec{n}.\ \vec{v} = 0$.

Ainsi, $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux pour tout vecteur $\vec{w}$ de $(\mathcal{P})$, donc par définition, $\vec{n}$ est normal à $(\mathcal{P})$.

Corollaire (fréquemment utilisé en pratique dans les exercices de type bac)

Pour qu'une droite de l'espace soit orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes contenues dans $(\mathcal{P})$.

Illustration



Remarque

Il est fondamental, dans le corollaire précédent, d'avoir deux droites sécantes. Pourquoi ?

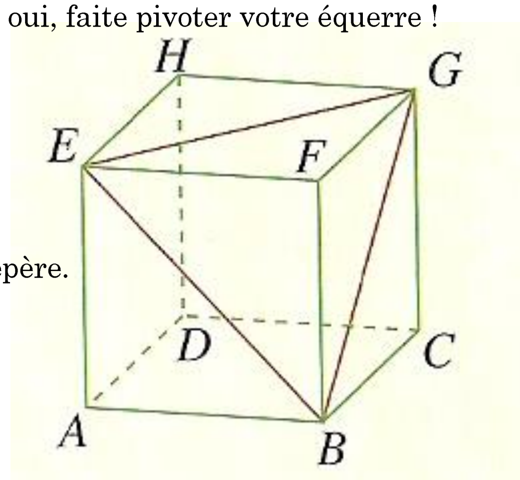
Tracer deux droites parallèles sur une feuille de papier, et avec votre équerre, mettez un côté de l'angle droit sur l'une d'elle, pensez-vous que le deuxième côté de l'angle droit de l'équerre soit toujours orthogonal à la seconde droite ??????????? Si vous pensez que oui, faite pivoter votre équerre !

Exercice important (XXL)

$ABCDEFGH$ est un cube muni du *R.O.N.* $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$.

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{ED}$ dans ce repère.

b) Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BED).



Exercice 4

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier, et I le milieu de $[AB]$.

a) Par des arguments de géométrie de collège, démontrer que la droite (AB) et le plan (ICD) sont orthogonaux.

b) En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

✂---

III-Equations cartésiennes d'un plan

Propriété XXXXL

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace, et A un point de l'espace muni d'un $R.O.N.$ $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

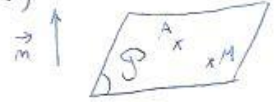
1) Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et orthogonal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que : …………..

2a) ♥♥♥Tout plan $\mathcal{P}$ ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une <u>équation cartésienne</u> de la forme : …………………..   où $d \in \mathbb{R}$.♥♥♥

2b) ♥♥♥Réciproquement, si $(a\ ;\ b\ ;\ c) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, alors l'ensemble $\mathcal{P} = \{M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ /\ ax + by + cz + d = 0\}$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.♥♥♥

<u>Preuve</u> : écrite sur la feuille ci-jointe.

1)



2) $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal à $(\mathcal{P})$ et $A\in(\mathcal{P})$.

$M\in(\mathcal{P}) \iff \vec{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Notons $A(\alpha;\beta;\gamma)$ et $M(x;y;z)$ dans le R.O.N $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$:

$\vec{AM}\begin{pmatrix}x-\alpha\\y-\beta\\z-\gamma\end{pmatrix}$; $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. $M\in(\mathcal{P}) \iff \vec{AM}\cdot\vec{n}=0 \iff a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0$

$M\in(\mathcal{P}) \iff ax-a\alpha+by-b\beta+cz-c\gamma=0 \iff ax+by+cz-\cancel{(a\alpha+b\beta+c\gamma)}=0$, On nomme $d=-(a\alpha+b\beta+c\gamma)$

Ainsi, $M\in(\mathcal{P}) \iff \underbrace{ax+by+cz+d=0}_{\text{appelée une équation cartésienne de } (\mathcal{P})}$.

2b) $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ et $(\mathcal{P})=\{M(x;y;z)\,/\,ax+by+cz+d=0\}$.

*) Montrons déjà que $(\mathcal{P})\neq\emptyset$:

Vu que $(a;b;c)\neq(0;0;0)$, on peut sans perte de généralité, supposer que $a\neq 0$.

Pour $y=z=0$, $ax+by+cz+d=0$ s'écrit donc : $ax+d=0$, donc $x=\frac{-d}{a}$ $(a\neq 0)$.

Ainsi, $A(-\frac{d}{a};0;0)\in(\mathcal{P})$, donc $(\mathcal{P})\neq\emptyset$.

**) Soit $M(x;y;z)\in(\mathcal{P})$: on a donc : $ax+by+cz+d=0$.

Or, $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-(-\frac{d}{a})\\y-0\\z-0\end{pmatrix}$, donc $\vec{AM}\begin{pmatrix}x+\frac{d}{a}\\y\\z\end{pmatrix}$ et soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$\vec{AM}\cdot\vec{n}=(x+\frac{d}{a})\times a+y\times b+z\times c = ax+by+cz+d$. Or par **), $ax+by+cz+d=0$.

Ainsi, $\vec{AM}\cdot\vec{n}=0$ et grâce à la caractérisation vue en 1) : $(\mathcal{P})$ est le plan passant par A et admettant

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

__Exemples__

$x - 2y + z + 3 = 0$ est l'équation d'un plan car cette dernière, qui se réécrit sous la forme :
$1x + (-2)y + 1z + 3 = 0$ est de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ avec : $a = 1$; $b = -2$; $c = 1$ et $d = 3$ et que

(1 ; -2 ; 1) n'est pas le triplet nul. Mieux, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan.

Comment trouve-t-on les coordonnées d'un point appartenant à ce plan ?

Donnez à deux des inconnues de son choix les valeurs de son choix, et en résolvant l'équation, on obtient la valeur de la troisième inconnue.

Par exemple, je fais $x = 0$ et $y = 0$ dans la relation : $x - 2y + z + 3 = 0$ ce qui donne : $0 - 0 + z + 3 = 0$ donc $z = -3$ et par suite, le point $A\,(0\ ;\ 0\ ;\ -3)$ appartient au plan d'équation $x - 2y + z + 3 = 0$.

Enfin un plan contient une infinité de points !!! Par exemple, ici, $B(1\ ;\ 0\ ;\ -4)$ $C(-3\ ;\ 0\ ;\ 0)$
$D(4\ ;2\ ;\ -3)$ sont des points appartenant au plan d'équation : $x - 2y + z + 3 = 0$. !
Trouvez les coordonnées d'un autre point appartenant à ce plan !!

__Remarques__

Cas particuliers importants :

Le plan d'équation $x = 0$ correspond au plan……………………………………………………………..

Le plan d'équation $y = 0$ correspond au plan …………………………………………………………….

Le plan d'équation $z = 0$ correspond au plan …………………………………………………………….

Que dire de deux plans qui ont des vecteurs normaux égaux (ou colinéaires) ?

Exercice 5 ***(le basique, à maîtriser parfaitement)***

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un *R.O.N.* de l'espace, et $A\,(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $B(3\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et $C(0\ ;\ 0\ ;\ 4)$.

On admet que A, B et C ne sont pas alignés.

1a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

1b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC). (Question qui tombe avec une probabilité égale ou supérieure à 0,9999 au bac…).

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (ABC) et passant par le point K milieu de $[AC]$.

3*)* Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $\mathcal{P}$ suivant :
$\mathcal{P} = \{M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ /\ 2x - y + z + 4 = 0\}$.

4) On appelle plan médiateur du segment $[BC]$ le plan $\mathcal{M}$ passant par le milieu I de $[BC]$ et ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{M}$.

Exercice 6 Soit $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

a) Démontrez que les points $A\,(2\ ;\ 1\ ;\ 3)$, $B\,(-3\ ;\ -1\ ;\ 7)$ et $C\,(3\ ;\ 2\ ;\ 4)$ définissent un plan $\mathcal{P}$.

b) Démontrer que la droite *(d)* dont une *R.P.* est : $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$.

c) En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

d) Soit $D(1\ ;0\ ;5)$. Les points *A, B, C* et *D* sont-ils coplanaires ? Justifier.

e) Déterminer les coordonnées du point *H* intersection de *(d)* et de $\mathcal{P}$.

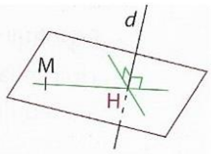
✂--

IV- Projeté orthogonal

A Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition

Le **projeté orthogonal** d'un point M sur une droite *d* est le point d'intersection H de *d* avec le plan passant par M et orthogonal à *d*.



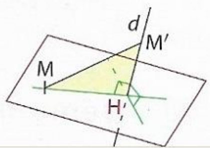
Remarques : • Le plan passant par M et orthogonal à *d* est unique.
• Lorsque M ∈ *d*, le projeté orthogonal de M sur *d* est le point M.

Propriété – Définition

Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite *d* est le point de *d* **le plus proche** de M.
On dit que MH est la **distance** du point M à la droite *d*.

Démonstration

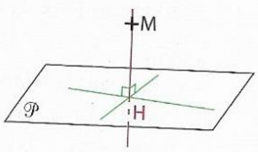
• Si M ∈ *d*, alors MH = 0 et H est le point de *d* le plus proche de M.
• Si M ∉ *d*, alors pour tout point M′ de *d*, le triangle MHM′ est rectangle en H, donc son hypoténuse est le côté le plus long soit MM′ > MH.
Donc H est le point de *d* le plus proche de M.



B Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition

Le **projeté orthogonal** d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point d'intersection H du plan $\mathcal{P}$ et de la droite passant par M orthogonale à $\mathcal{P}$.



Remarque : lorsque M ∈ $\mathcal{P}$, le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est le point M.

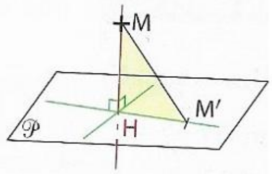
Propriété – Définition

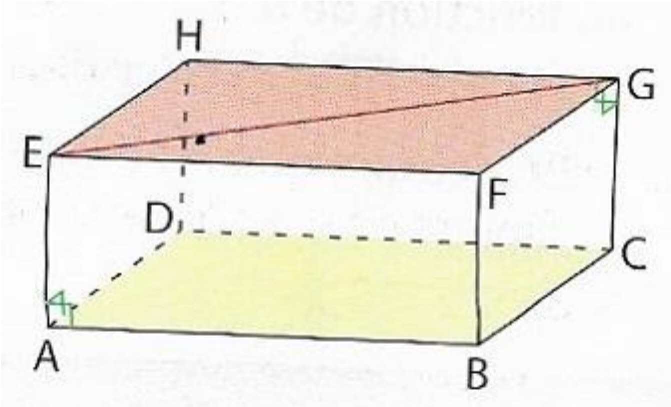
Le projeté orthogonal H d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ **le plus proche** de M.
On dit que MH est la **distance** du point M au plan $\mathcal{P}$.

Démonstration

- Si $M \in \mathcal{P}$, alors $MH = 0$ et H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.
- Si $M \notin \mathcal{P}$, alors pour tout point M′ de $\mathcal{P}$, le triangle MHM′ est rectangle en H, donc son hypoténuse est le côté le plus long, soit $MM' > MH$.

Donc H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.





Exemple

Dans le pavé droit *ABCDEFGH*, ci-contre, déterminer :

a) Le projeté orthogonal du point *H* sur le plan (*ABC*).

b) Le projeté orthogonal du point *E* sur la droite (*CG*).

Exercice 7

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un *R.O.N.* de l'espace.

Soit *(d)* la droite passant par $A(1\ ;-2\ ;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$ et $B(-15\ ;\ -10\ ;\ 4)$.

On se propose de déterminer les coordonnées du point *H*, projeté orthogonal de *B* sur la droite *(d)*.

a) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par *B* et orthogonal à *(d)*.

b) En déduire les coordonnées du point *H*.

c) Calculer la distance du point *B* à la droite *(d)*.

✂--

Exercice 8

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un *R.O.N.* de l'espace.

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(3\ ;\ 1\ ;-2)$ de de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix}$.

a) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$, parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par le point $B(-5\ ;\ 0\ ;\ 7)$.

✂--

Exercice 9

Soit A(1 ; −5 ; 3), B(2 ; −4 ; 4), C(−1 ; −2 ; 2) et D(18 ; −13 ; 25) quatre points de l'espace.

1. a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Déterminer l'aire du triangle ABC.

2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(-4\ ;-1\ ;5)$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire une équation du plan (ABC).

c. Vérifier que le point H(−2 ; −8 ; 0) est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

3. a. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).

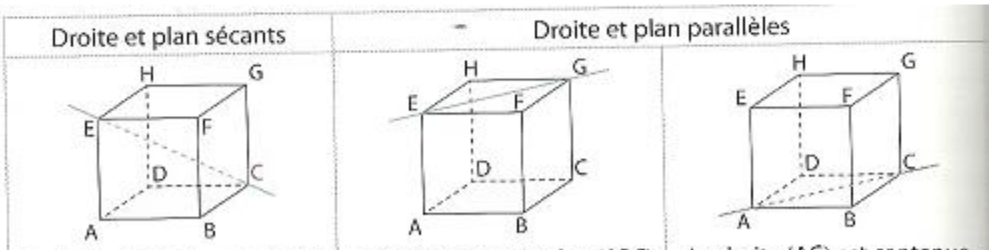
b. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

✂--

V-Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace

A-Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants et ont alors un unique point d'intersection, soit parallèles et n'ont alors aucun point d'intersection.



La droite (EC) et le plan (ABC) sont sécants en C.
La droite (EG) et le plan (ABC) sont strictement parallèles.
La droite (AC) est contenue dans le plan (ABC).

Propriété (admise)

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{w}$, et $\mathscr{P}$ un plan de base $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. **(d) et $\mathscr{P}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs** $\vec{w}$ ***et*** $\vec{n}$ **sont ………………..**

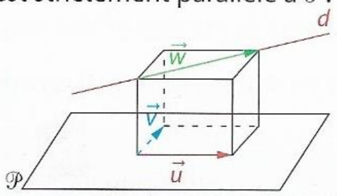
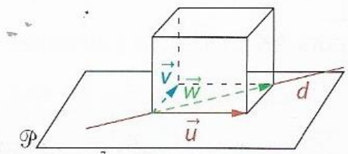
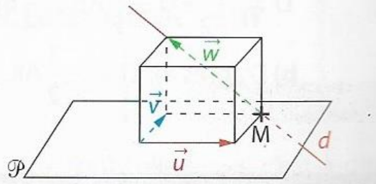
2. **(d) et $\mathscr{P}$ sont sécantes si et seulement si les vecteurs** $\vec{w}$ ***et*** $\vec{n}$ **ne sont pas ………………..**

On a aussi les deux règles suivantes moins utilisées :

1bis. (d) et $\mathscr{P}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ………………..

2bis. (d) et $\mathscr{P}$ sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas ………………..

• $\mathscr{P}$ est un plan de direction $(\vec{u}, \vec{v})$ et d est une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

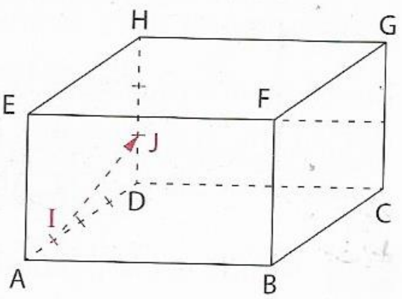
$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires : d et $\mathscr{P}$ sont parallèles.		$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
d est strictement parallèle à $\mathscr{P}$.	d est contenue dans $\mathscr{P}$.	d et $\mathscr{P}$ sont sécants en M.
		

__Remarque__ : dans les exercices, sans vecteurs, lorsqu'on voudra justifier qu'une droite *(d)* et un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles, il suffira donc de justifier que la droite *(d)* est parallèle à l'une des droites contenues dans le plan $\mathscr{P}$.

On procédera essentiellement de façon vectorielle.

__Exercice 10__

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I et J sont les points définies par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.



a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.

b) En déduire que la droite *(IJ)* et le plan *(BCG)* sont parallèles.

✂--

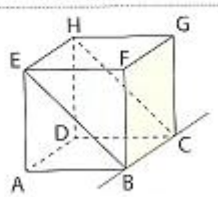
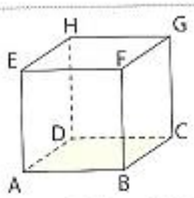
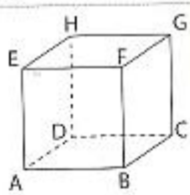
__B- Position relative de deux plans de l'espace__

__Rappel__ : En géométrie dans l'espace, deux plans sont strictement parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point en commun, confondus lorsqu'ils ont tous leurs points en commun.

Deux plans sont dits sécants lorsqu'ils ne sont ni parallèles ni confondus.

Deux plans sécants se coupent (toujours) suivant une droite.

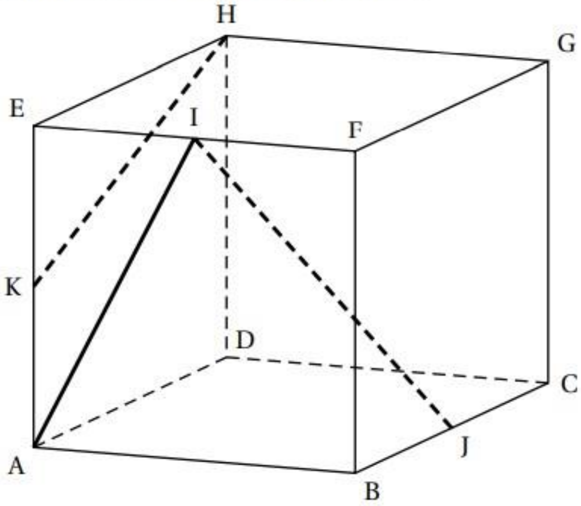
__Illustration__

Plans sécants	Plans parallèles	
		
Les plans (EBC) et (FBC) sont sécants suivant la droite (BC).	Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles.	Les plans (ABC) et (ABD) sont confondus.

Quelques exercices issus de textes de baccalauréat

Exercice I

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse,

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

2. **a.** Donner les coordonnées des points I et J.

   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+t \\ y & = & 8-2t \\ z & = & -2+3t \end{array}\right. ,\, t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 8+2t \end{array}\right. ,\, t\in\mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.
4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
5. Montrer que le point L(4 ; 0 ; 3) est le projeté orthogonal du point M(5 ; 3 ; 1) sur le plan $\mathscr{P}$.

✂- -

Exercice II (métropole 2022)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées (−1 ; 1 ; 3),
- la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & 2-t, \\ z & = & 2+2t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.

   b. Montrer que le point B(−1 ; 3 ; 0) appartient à la droite $\mathscr{D}$.

   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}$.

2. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

  a. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

  b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9}\ ;\ \dfrac{19}{9}\ ;\ \dfrac{16}{9}\right)$.

  c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.

On rappelle que le point B$(-1\ ;\ 3\ ;\ 0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

  a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\,\vec{u}$.

  b. Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$.

  c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathscr{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\dfrac{8}{9}$.

Calculer l'aire du triangle ACH.

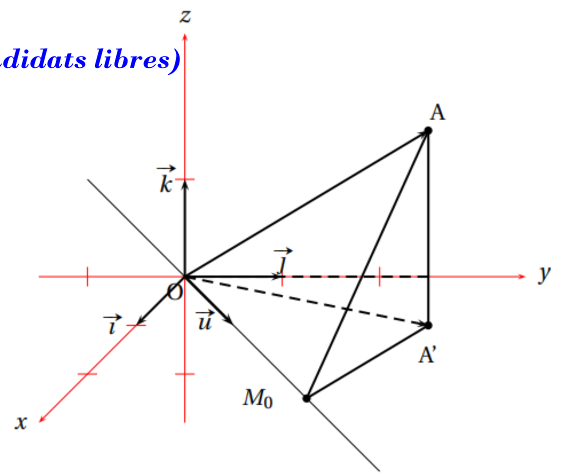
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

✂- -

Exercice III (métropole Juin 2021, candidats libres)

Dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées $(1 ; 3 ; 2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.



Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\,;\,t\,;\,0)$.

   a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :

   $$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$

   b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\,;\,2\,;\,0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.
   On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\,;\,3\,;\,0)$.
   Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.

5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

<u>Exercice supplémentaire</u> (distance d'un point à un plan, formule théorique) (métropole 2011)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et par M_0 le point de coordonnées $\left(x_0\,;\ y_0\,;\ z_0\right)$. On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$.

On suppose connue la propriété suivante :
Propriété : Le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d(M_0, \mathscr{P})$ du point M_0 au plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que

$$d(M_0, \mathscr{P}) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

1. Justifier que $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
2. Démontrer que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$.
3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $(4;1;5)$, $(-3\,;\,2\,;\,0)$, $(1;3;6)$, $(-7\,;\,0\,;\,4)$.

1. a. Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathscr{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x+2y-z-1=0$.

   b. Déterminer la distance d du point F au plan $\mathscr{P}$.