

I-Vecteur directeur d'une droite et équations cartésiennes d'une droite

Définition

Soient A et B deux points distincts appartenant à une même droite \mathcal{D} .

Tout vecteur \vec{u} colinéaire au vecteur \overrightarrow{AB} est appelé un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} .

Illustration :

Remarque : une droite donnée admet donc une infinité de vecteurs directeurs deux à deux colinéaires.

On dit aussi que \vec{u} dirige la droite \mathcal{D} pour dire que \vec{u} est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} .

Exemple : Dans un repère du plan, si $A(1 ; -4)$ et $B(-1 ; 2)$, alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) , tout comme $\vec{u} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ ou encore $\vec{v} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

Propriété

Soit A un point du plan et \vec{u} un vecteur non nul.

Il existe une unique droite \mathcal{D} passant par A et ayant pour vecteur directeur \vec{u} .

\mathcal{D} est l'ensemble des points M du plan tels que :

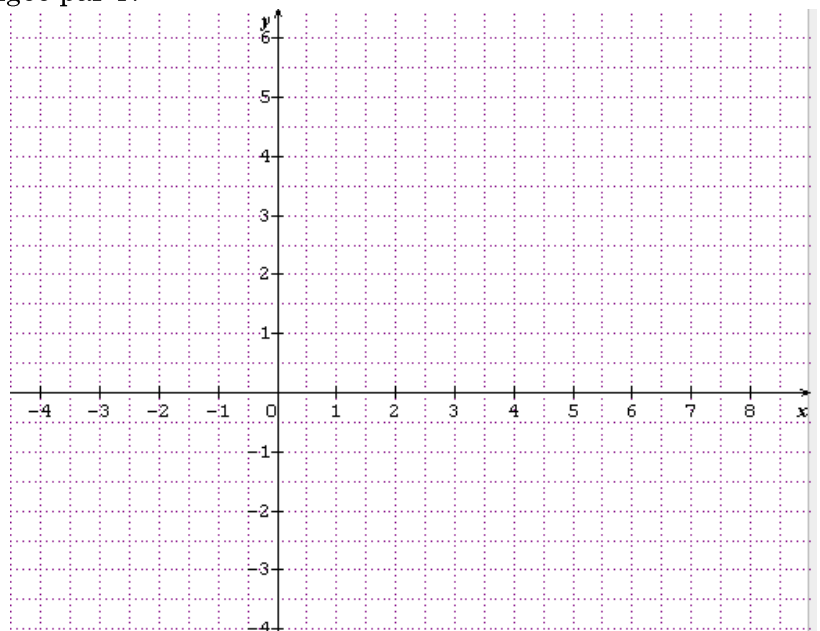
c'est-à-dire tels que.....

✂

Exercice 1 Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) ci-dessous, construire :

a) La droite \mathcal{D} passant par $A(-1 ; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) La droite Δ passant par $B(5 ; 1)$ et dirigée par \vec{i} .



Remarque importante

Soient \mathcal{D} et Δ deux droites respectivement dirigées par des vecteurs \vec{u} et \vec{u}' .

\mathcal{D} et Δ sont parallèles si et seulement si \vec{u} et \vec{u}' sont.....

\mathcal{D} et Δ sont sécantes si et seulement si \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas

Dans l'exemple précédent, \mathcal{D} et Δ sont car :

♥♥ Théorème XL ♥♥

Quelle que soit la droite \mathcal{D} du plan, il existe trois réels a, b et c , tels que, pour tout point $M(x ; y)$ du plan, M appartient à la droite \mathcal{D} si et seulement si : $ax + by + c = 0$

De plus, le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} .

Preuve :

✂

Définition

Soit \mathcal{D} une droite du plan.

L'équation : $ax + by + c = 0$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ est appelée une équation cartésienne de la droite \mathcal{D}

dont un vecteur directeur est : $\vec{u} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

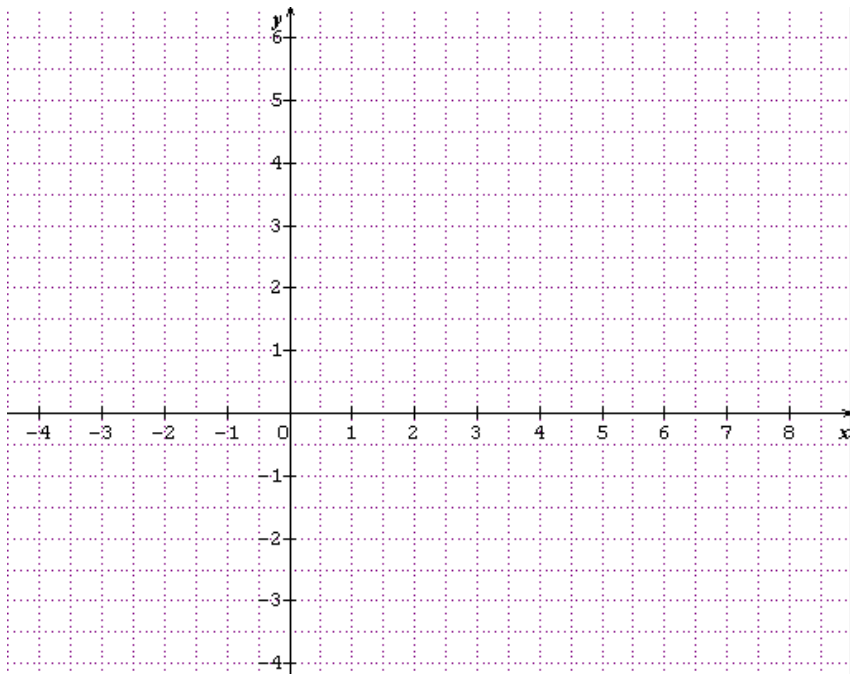
Remarques

- $M(x_M ; y_M)$ appartient à la droite \mathcal{D} d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$ si et seulement si les coordonnées de M rendent vraies l'égalité précédente (on dit fréquemment que les coordonnées du point M vérifient l'équation : $ax + by + c = 0$), c'est-à-dire lorsqu'on a :
- Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes : par exemple, $x + 2y + 5 = 0$ est une équation de droite, $4x + 8y + 20 = 0$ est une autre équation de cette même droite, tout comme : $0,5x + y + 2,5 = 0$ ou encore: $-3x - 6y - 15 = 0$ etc.....

Exercice 2

Soit \mathcal{D} la droite dont une équation cartésienne : $x + 2y - 3 = 0$.

a) Déterminer les coordonnées d'un point appartenant à la droite \mathcal{D} , ainsi que les coordonnées d'un vecteur directeur de \mathcal{D} . Construire la droite \mathcal{D} dans le repère ci-dessous :



b) Le point $B(51 ; -24)$ appartient-il à la droite \mathcal{D} ? Même question avec $A(-150 ; 76)$.

✂

Exercice 3

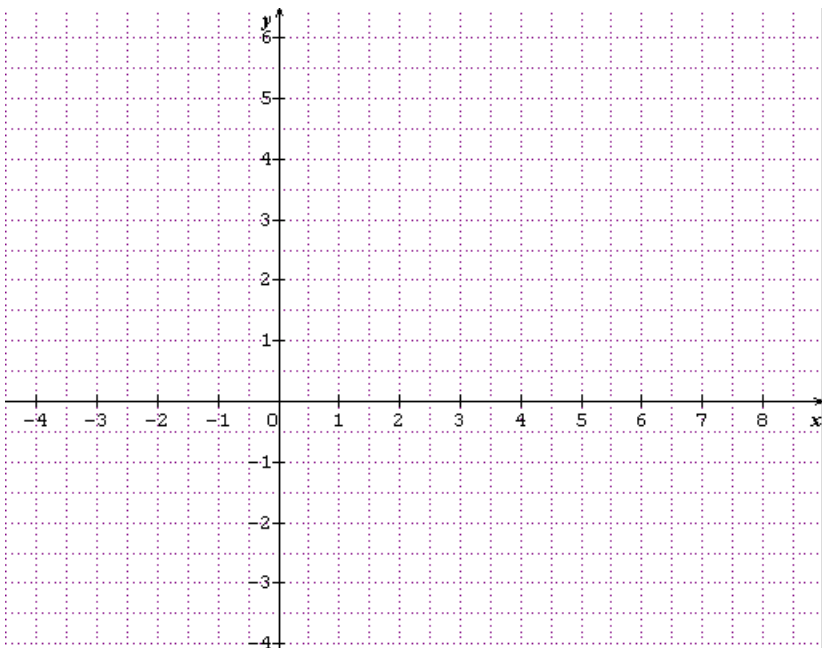
Déterminer, par deux méthodes différentes, une équation cartésienne de la droite \mathcal{D} passant par le point $A(-1 ; 2)$ et ayant pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

✂

II – Equation réduite d'une droite

1) Soit \mathcal{D} la droite passant par $A(2 ; 1)$ et dirigée par $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La tracer dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Quel constat fait-on ? Comment nommeriez-vous une telle droite ?



2) Soit Δ la droite dont une équation cartésienne est : $x + 1 = 0$. Trouver un vecteur directeur de Δ et la construire dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Constat ?

3) Soit d la droite dont une équation cartésienne est : $x + 2y - 1 = 0$.

Expliquer pourquoi cette droite est non parallèle à l'axe des ordonnées.

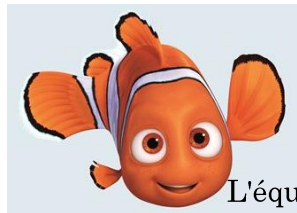
Isoler y dans l'équation cartésienne de d .

✂

Propriété et définition

Dans un repère orthogonal :

- toute droite \mathcal{D} **non verticale** du plan admet une unique équation de la forme : $y = mx + p$. Cette dernière équation est appelée **l'équation réduite** de la droite \mathcal{D} .
- Toute droite **verticale** admet une unique équation de la forme : $x = k$ où k est un réel.



L'équation est **réduite** lorsque y est isolé, c'est-à-dire $y = mx + p$.

Tous les points appartenant à une **même droite verticale ont la même abscisse**, d'où la forme des équations des droites verticales : $x = k$.

Preuve :

\mathcal{D} est une droite du plan, donc elle admet comme équation cartésienne : $ax + by + c = 0$.

$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} .

De plus, \mathcal{D} n'est pas verticale, donc $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc $\det(\vec{u}, \vec{j}) \neq 0$

Donc $\begin{vmatrix} -b & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ donc : $-b \times 1 - a \times 0 \neq 0$ donc $-b \neq 0$, donc $b \neq 0$.

Par suite : $ax + by + c = 0$ équivaut à : $by = -ax - c$ et donc comme $b \neq 0$, on peut effectuer la division par b : $y = \frac{-ax - c}{b} = -\frac{a}{b}x + \left(-\frac{c}{b}\right)$.

En posant : $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$ on obtient : $y = mx + p$.

Si Δ est une droite verticale, alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige Δ qui admet donc pour équation cartésienne

$(-b=0 \text{ et } a=1 \text{ donc } a=1 \text{ et } b=0) : 1x + 0y + c = 0$ où c est un réel, donc $x + c = 0$ donc $x = -c$.

En posant $k = -c$, on obtient pour équation de $\Delta : x = k$.

Remarques: toute droite du plan admet des équations cartésiennes.

Seules les droites non verticales du plan admettent une équation réduite.

Une droite est non verticale dès qu'elle contient deux points n'ayant pas la même abscisse.

Fondamental: si une droite \mathcal{D} a pour équation réduite : $y = mx + p$, alors $\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} .

Exemple

1) Déterminer l'équation réduite de la droite \mathcal{D} qui a pour équation cartésienne : $-10x + 5y + 15 = 0$.

2) Construire dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la droite Δ d'équation : $y = \frac{1}{3}x + 1$.

✂

Remarque: la droite \mathcal{D} d'équation réduite : $y = mx + p$ est la courbe représentative de la fonction affine f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = mx + p$.

Propriété

Soit \mathcal{D} la droite d'équation réduite : $y = mx + p$.

Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points appartenant à \mathcal{D} .

Alors $m = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

Preuve et illustration :

✂

Définition : m est appelé le coefficient directeur (ou encore la pente) de la droite \mathcal{D} .

La valeur de m ne dépend pas du choix effectué des deux points appartenant à \mathcal{D} dans le calcul précédent.

p est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite \mathcal{D} : c'est l'ordonnée du point d'intersection de \mathcal{D} et de l'axe des ordonnées.

Illustration :

🔴🔴 On parle de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine uniquement pour des droites non verticales. Les droites verticales n'ont pas de coefficient directeur ni d'ordonnée à l'origine !

Exemple

Déterminer, pour chacune des deux droites suivantes, le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine :

La droite \mathcal{D}_1 qui a pour équation réduite : $y = -3x + 1$

La droite \mathcal{D}_2 qui a pour équation réduite : $y = x - 2$

La droite \mathcal{D}_3 qui a pour équation réduite : $y = 3$.

La droite \mathcal{D}_4 qui a pour équation : $3x - 4y + 11 = 0$.

✂

Remarque fondamentale: les droites dont le coefficient directeur est égal à zéro sont
et réciproquement, les droitesont pour coefficient directeur zéro.

Exercice 4

Déterminer l'équation réduite de la droite D qui passe par le point $K(1 ; -4)$ et qui a pour coefficient directeur -2 .

✂

Exercice 5

Déterminer l'équation réduite de la droite qui passe par $A(-1 ; 5)$ et $B(4 ; 10)$.

✂

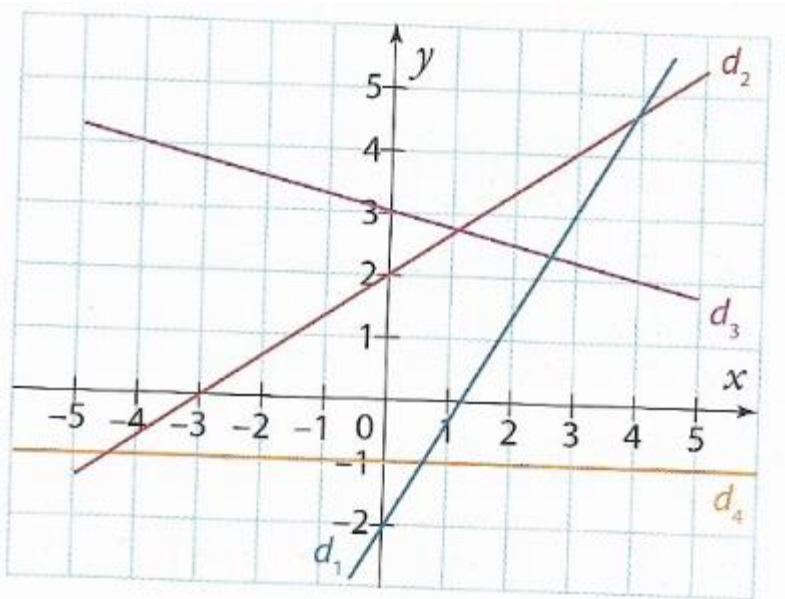
Exercice 6

Construire dans un repère la droite D qui passe par $A(-2198 ; -2202)$ et $B(1892 ; 1888)$.

✂

Exercice 7 (clé)

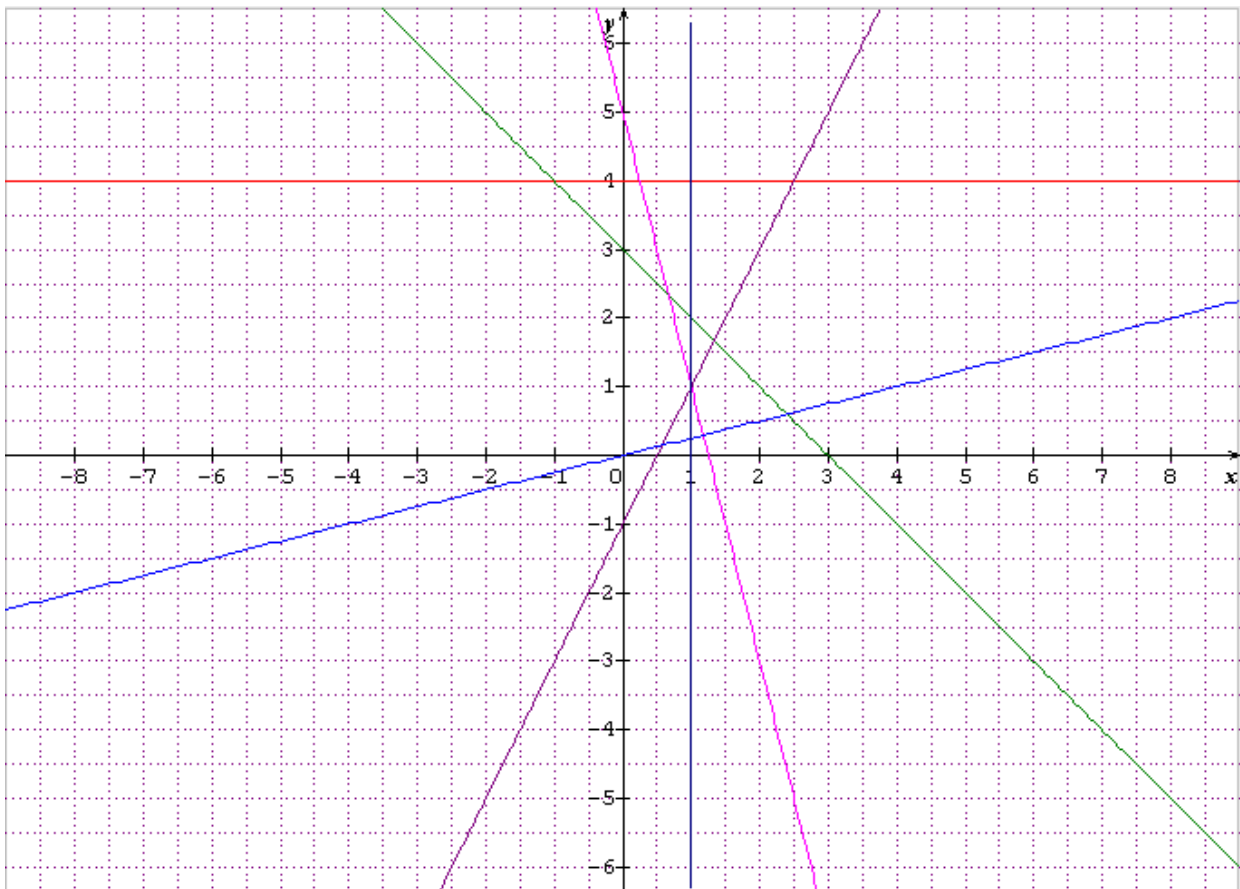
Déterminer le coefficient directeur de chacune des droites tracées :



✂

Exercice 8 (clé)

Déterminer une équation de chacune des droites suivantes :



Rappel: Lorsqu'on a deux droites \mathcal{D} et Δ du plan, on sait depuis le collège que :

- \mathcal{D} et Δ sont sécantes (et se coupent en un point) : illustration :
- \mathcal{D} et Δ sont strictement parallèles : illustration :
- \mathcal{D} et Δ sont confondues : illustration :

Etudier la position relative de deux droites du plan, revient à déterminer dans lequel des trois cas rappelés ci-dessus on se trouve.

Propriété

Deux droites \mathcal{D} et Δ du plan sont parallèles si et seulement si :

Elles *sont toutes les deux verticales* **ou bien** elles *ont le même coefficient directeur*.

Preuve :

Remarque : si \mathcal{D} a pour équation : $y = mx + p$ et Δ a pour équation : $y = m'x + p'$, alors :

- \mathcal{D} et Δ sont strictement parallèles si et seulement si :
- \mathcal{D} et Δ sont confondues si et seulement si :
- \mathcal{D} et Δ sont sécantes si et seulement si :

Exercice 9

Etudier la position relative des droites suivantes :

- 1) d_1 a pour équation : $y=3x-4$ et d_2 a pour équation : $y = 3x+8$.
- 2) Δ_1 a pour équation : $y = 2x + 3$ et Δ_2 a pour équation : $6x - 3y + 9 = 0$.
- 3) D_1 a pour équation : $y = x$ et D_2 a pour équation : $y = -x + 1$.

Remarque : lorsque deux droites dont on a des équations sont sécantes, il est assez naturel de chercher à déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites. C'est l'un des objectifs du paragraphe suivant.

III – Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

Un exemple d'introduction :

On dispose d'un stock de stylos tous identiques, et de crayons tous identiques.

4 stylos et un crayon coûtent 10,40€, tandis que 2 stylos et 3 crayons coûtent 9,20€.

A l'aide de ces informations, nous allons dégager une méthode qui va nous permettre de trouver à quel prix est vendu chaque stylo et chaque crayon.

Mise en équation :

Cet exemple sera résolu dans la suite, après avoir dégagé des méthodes de résolution.

Définition

On appelle système linéaire de deux équations à deux inconnues, tout ensemble formé par deux équations, où figurent, dans chacune, deux inconnues, notées x et y , [les inconnues étant sans puissance]. On note avec une accolade un tel système.

Par exemple : $\begin{cases} 2x+4y=-5 \\ x+0,2y=11,3 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{4}x+5y-\sqrt{2}=0 \\ -2x+5y+13,1=0 \end{cases}$ sont des systèmes de deux équations à

deux inconnues. On dira seulement système dans toute la suite.

Définition

On appelle *solution* du système, tout *couple* de réels $(x ; y)$ tel que *chacune des deux égalités* figurant dans le système soit *vraie*. Attention à l'ordre des valeurs dans un couple !

On considère le système suivant : $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$

Le couple $(3 ; 1)$ est-il solution du système *précédent*? Même question avec le couple $(\frac{9}{7} ; \frac{13}{7})$.

Méthode :

Une question légitime : le couple $(\frac{9}{7}; \frac{13}{7})$ est-il le *seul* couple solution du précédent système ?

Définition

Résoudre un système, c'est *déterminer* tous les éventuels *couples de solution* du système.

Deux systèmes d'équations sont dits *équivalents* lorsqu'ils ont le *même ensemble de solutions*.

On *transforme* un système en un *système équivalent* en faisant des opérations licites sur chacune de ses équations : ces opérations sont : ajout d'un même nombre dans chacun des membres d'une égalité, multiplication de chacun des membres par le même réel non nul, permutation des lignes du système, remplacement d'une ligne par la somme ou la différence des deux autres....

♣ Résolution d'un système par la *méthode de substitution*

Résoudre le système :
$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

Méthode de substitution :
.....
.....
.....
.....

Exercice 10

Résoudre, par la méthode de substitution, le système suivant :
$$\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 7x + y = 12 \end{cases}$$

Remarque : Si aucun des coefficients multiplicateurs des inconnues x ou y n'est égal à 1 ou -1, la méthode de substitution engendre souvent des calculs un peu plus lourds.

Ce serait par exemple le cas avec le système suivant :
$$\begin{cases} 3x + 2y + 7 = 0 \\ 5x + 6y - 11 = 0 \end{cases}$$

Nous allons voir une autre méthode de résolution des systèmes, parfois très pratique et efficace.

✦ Résolution d'un système par la *méthode de combinaison linéaire*.

Méthode de combinaison :

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Application à la résolution de problèmes

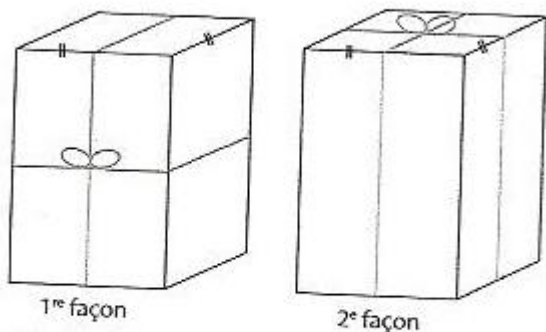
Exercice 11

Résoudre le problème posé en introduction du paragraphe III.

✂

Exercice 12

Un paquet a la forme d'un parallélépipède ayant deux faces carrées.



Pour le ficeler selon la 1^{re} façon, il faut 3 m de ficelle en comptant 46 cm pour un nœud.
Pour le ficeler selon la 2^e façon, il faut 3,3 m de ficelle en comptant toujours 46 cm pour un nœud.
Quelles sont les dimensions du paquet ?

Remarque importante : lien entre résolution de système et équations de droites.

Considérons le système $\mathcal{S} : \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$

Soit D_1 la droite d'équation cartésienne : $3x - y + 1 = 0$ et D_2 la droite d'équation : $x + 3y + 2 = 0$.
 Un point $M(x ; y)$ appartient à D_1 et D_2 si et seulement si le couple $(x ; y)$ formé par ses coordonnées est solution du système \mathcal{S} .

Ainsi, résoudre le système \mathcal{S} revient géométriquement à déterminer les des éventuels.....

Dans les exercices, il sera assez naturel de d'abord prévoir avant de résoudre le système s'il a une unique solution, aucune solution ou une infinité de solutions.

Propriété

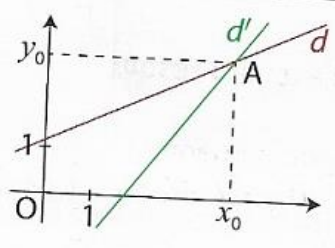
On suppose que $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ et $(a' ; b') \neq (0 ; 0)$ et on s'intéresse au système $(S) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$
 Dans un repère orthonormé, $ax + by + c = 0$ est une **équation cartésienne** d'une droite d et $a'x + b'y + c' = 0$ est une **équation cartésienne** d'une droite d' .

$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d , $\vec{v} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d' .

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -ba' - (-b')a = ab' - a'b.$$

La nullité ou non nullité du déterminant précédent nous permet de dire :

1^{er} cas :

$ab' - a'b \neq 0$
\vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires.

d et d' sont sécantes en un point $A(x_0 ; y_0)$.
Le système (S) a un seul couple solution : $(x_0 ; y_0)$.
$\mathcal{S} = \{(x_0 ; y_0)\}$

2^{ème} cas : $ab' - a'b = 0$.

et sont colinéaires.

d et d' sont parallèles au sens large.

Plus précisément : si le tableau suivant est un tableau de proportionnalité, alors les droites d et d' sont confondues.

a	b	c
a'	b'	c'

Illustration :

Sinon elles sont strictement parallèles.

Illustration :

Exercice 13

Soit d_1 la droite d'équation cartésienne : $2x + y + 5 = 0$ et d_2 la droite d'équation cartésienne $3x + 4y - 2 = 0$.

Etudier la position relative de ces deux droites en étant le plus précis possible !