CHAPITRE IX EQUATIONS DE DROITES ET SYSTEMES.

I-Vecteur directeur d'une droite et équations cartésiennes d'une droite

Définition

Soient A et B deux points distincts appartenant à une même droite $\mathscr{D}$.

Tout vecteur $\vec{u}$ non nul et colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

Illustration :

Remarque : une droite donnée admet donc une infinité de vecteurs directeurs deux à deux colinéaires.

On dit aussi que $\vec{u}$ dirige la droite $\mathscr{D}$ pour dire que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

Exemple : Dans un repère du plan, si $A(1\ ;\ -4)$ et $B(-1\ ;\ 2)$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = -1-1 = -2 \\ y_B - y_A = 2-(-4) = 6 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB), tout comme $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ ou encore $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Propriété

Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

Il existe une unique droite $\mathscr{D}$ passant par A et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

$\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires

c'est-à-dire tels que : $det(\overrightarrow{AM}\ ;\ \vec{u}) = 0$

Cela ne fait que traduire que par un point donné, il passe une parallèle et une seule à une droite donnée.

Illustration :

et réciproquement !

Exercice 1 Dans le repère $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ de la page ci-contre, construire :

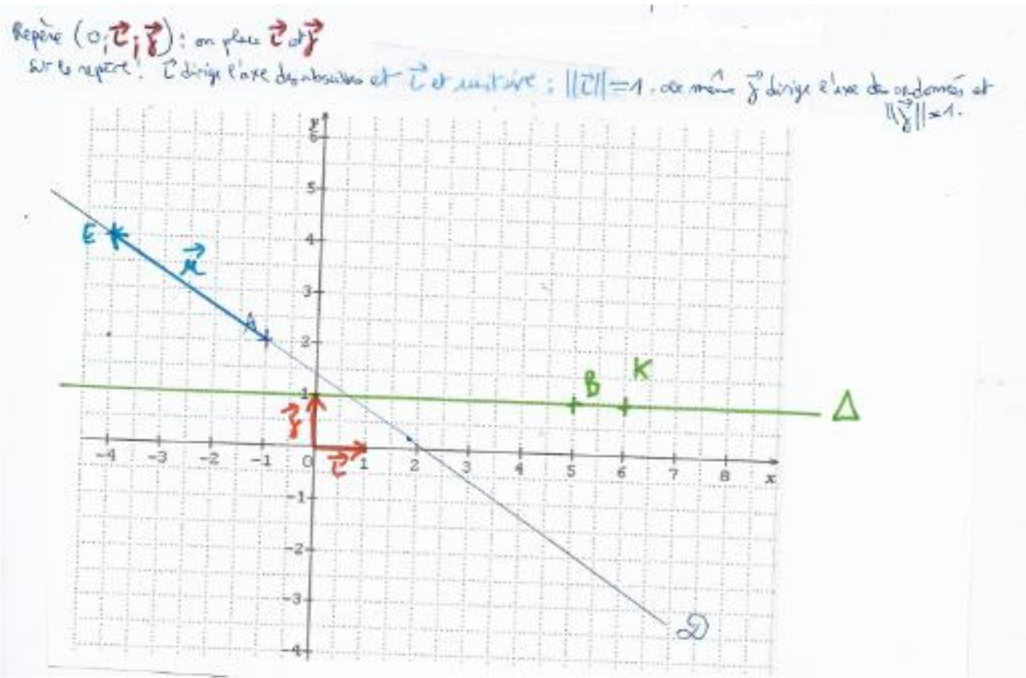
a) La droite $\mathscr{D}$ passant par $A(-1\ ;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) La droite Δ passant par $B(5\ ;1)$ et dirigée par $\vec{i}$.

Réponse : facile ! Pour le *a*), on place le point $A(-1\ ;\ 2)$, puis à partir de ce point, on recule de 3 unités à l'horizontale et on monte de 2 unités à la verticale : on obtient le point E extrémité du représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine A : Par suite, $\mathscr{D} = (AE)$.

b) De même, encore faut-il se souvenir que $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$! Δ passe par $B(5\ ;\ 1)$ et $K(6\ ;\ 1)$.

Construction :



Remarque importante

Soient $\mathscr{D}$ et Δ deux droites respectivement dirigées par des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$.

$\mathscr{D}$ et Δ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ sont COLINEAIRES.

$\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ ne sont pas COLINEAIRES.

Dans l'exemple précédent, $\mathscr{D}$ et Δ sont SECANTES car : $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ non colinéaires vu que

$\det(\vec{u}\ ;\ \vec{i}) = \begin{vmatrix}-3 & 1\\2 & 0\end{vmatrix} = -3\times 0 - 2\times 1 = -2$ et $-2 \neq 0$.

♥♥ Théorème XL

Quelle que soit la droite $\mathscr{D}$ du plan, il existe trois réels a, b et c, tels que, pour tout point $M(x\ ;\ y)$ du plan, M appartient à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si : $ax + by + c = 0$

De plus, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ st un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

Preuve : (vous pouvez admettre ce résultat et lire la démonstration pour les curieux).

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(\omega ; \varphi)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$.

Soit $M(x ; y)$ un point quelconque.

M appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-\omega \\ y-\varphi\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires ce qui équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AM} ; \vec{u}) = 0$.

Or, $\det(\overrightarrow{AM} ; \vec{u}) = \begin{vmatrix} x-\omega & \alpha \\ y-\varphi & \beta \end{vmatrix} = (x-\omega)\beta - (y-\varphi)\alpha$

$\det(\overrightarrow{AM} ; \vec{u}) = 0 \iff \beta(x-\omega) - \alpha(y-\varphi) = 0$

$\det(\overrightarrow{AM} ; \vec{u}) = 0 \iff \beta x - \beta\omega - \alpha y + \alpha\varphi = 0$

$\det(\overrightarrow{AM} ; \vec{u}) = 0 \iff \beta x - \alpha y + \alpha\varphi - \beta\omega = 0$.

Posons (notons) : $a = \beta$; $b = -\alpha$ et $c = \alpha\varphi - \beta\omega$.

Ainsi, $M(x ; y) \in \mathcal{D} \iff ax + by + c = 0$

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan.

L'équation : $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ est appelée une ***équation cartésienne*** de la droite $\mathcal{D}$ dont un vecteur directeur est : $\vec{u}\begin{pmatrix}-b \\ a\end{pmatrix}$.

Remarques

- $M(x_M ; y_M)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne : $ax+by+c=0$ si et seulement si les coordonnées de M rendent vraies l'égalité précédente (on dit fréquemment que les coordonnées du point M vérifient l'équation : $ax + by + c = 0$), c'est-à-dire lorsqu'on a : $ax_M + by_M + c = 0$.

  En particulier $M(x_M ; y_M)$ n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne : $ax+by+c=0$ si et seulement si $ax_M + by_M + c \neq 0$.

- Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes : par exemple, $x + 2y + 5 = 0$ est une équation de droite, $4x + 8y + 20 = 0$ est une autre équation de cette même droite, tout comme : $0{,}5x + y + 2{,}5 = 0$ ou encore: $-3x - 6y - 15 = 0$ *etc.*.....

Dès que vous avez une équation cartésienne d'une droite, vous en obtenez une autre en multipliant chacun de ses coefficients *a, b* et *c* par le même nombre non nul de votre choix !

En particulier, si une droite a pour équation cartésienne : $100x + 200y + 300 = 0$, on aura tout intérêt à privilégier l'équation $x + 2y + 3 = 0$ dans les calculs ! On essaiera d'avoir les coefficients a, b et c, les plus petits possibles dans la mesure du possible !

Exercice 2

Soit $\mathscr{D}$ la droite dont une équation cartésienne : $x + 2y - 3 = 0$.

a) Déterminer les coordonnées d'un point appartenant à la droite $\mathscr{D}$, ainsi que les coordonnées d'un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Construire la droite $\mathscr{D}$ dans le repère ci-dessous :

Méthode (fondamental) : vous disposez de l'équation : $x + 2y - 3 = 0$ et vous voulez trouver les coordonnées d'un point appartenant à la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $x + 2y - 3 = 0$.

Un point $M(x\ ; y)$ appartient à cette droite $\mathscr{D}$ si et seulement si abscisse de M plus le double de l'ordonnée de M moins 3 est égale à 0.

Donc vous donnez par exemple à x la valeur de votre choix, et en résolvant l'équation vous obtenez celle de y qui lui correspond.

Par exemple je choisis $x = 0$: la relation : $x + 2y - 3 = 0$ s'écrit alors : $0 + 2y - 3 = 0$, c'est-à-dire $2y - 3 = 0$ donc $2y = 3$ et $y = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

Ainsi, le point $M(0\ ;\ 1{,}5)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

***Remarques* :** vous avez une infinité de choix possibles pour l'abscisse.

Par exemple, je choisis $x = 1$: la relation : $x + 2y - 3 = 0$ s'écrit alors : $1 + 2y - 3 = 0$, c'est-à-dire $2y - 2 = 0$ donc $2y = 2$ et $y = \dfrac{2}{2} = 1$: le point $P(1\ ;\ 1)$ est un autre point appartenant à la droite $\mathscr{D}$!

Bien évidemment, il n'y a aucune raison de privilégier la variable x dans le choix de la valeur qu'on lui affecte.

Par exemple, ici, je choisis $y = 0$: la relation $x + 2y - 3 = 0$ s'écrit alors : $x + 2\times 0 - 3 = 0$ donc $x = 3$ et par suite le point $R(3\ ;\ 0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

On retiendra qu'en pratique, pour faciliter les calculs, le choix de $x = 0$ ou celui de $y = 0$ est particulièrement judicieux car il allège les calculs !

En guise de calcul mental, essayez de trouver les coordonnées d'un autre point situé sur la droite $\mathscr{D}$.

Enfin pour trouver les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$, deux méthodes possibles :

Méthode 1 : on applique le cours : *Si $\mathscr{D}$ a pour équation :* $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ avec $(\boldsymbol{a}\ ; \boldsymbol{b}) \neq (0\ ; 0)$ alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ dirige $\mathscr{D}$.

Ici : $\mathscr{D}$ a pour équation cartésienne : $x + 2y - 3 = 0$, donc $\mathbf{1}x + \mathbf{2}y - 3 = 0$, donc $a = \mathbf{1}$ et $b = \mathbf{2}$, et par suite, $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

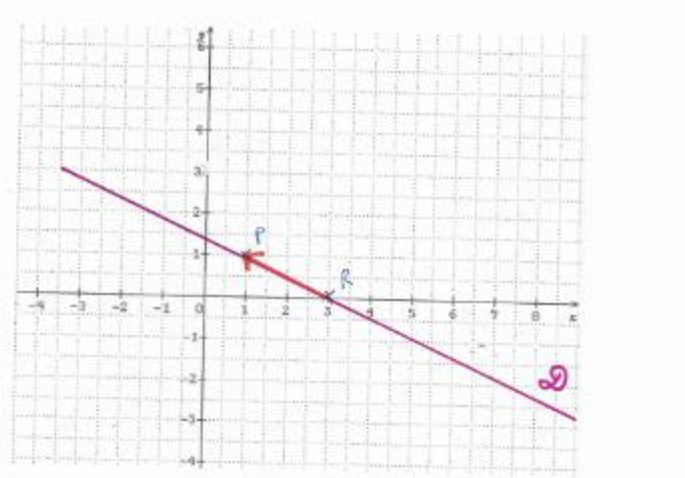
Le tracé de $\mathscr{D}$ est alors évident, comme à l'exercice 1 !

Méthode 2 : On se souvient qu'une droite est définie par la donnée de deux points distincts (= différents, c'est-à-dire non placés au même endroit).

On détermine donc les coordonnées de deux points appartenant à $\mathscr{D}$,

Ici par exemple, en se référant aux calculs en amont, $\mathscr{D}$ passe par les points $P(1\ ;\ 1)$ et $R(3\ ;0)$ donc $\overrightarrow{PR}$ dirige la droite $\mathscr{D}$, avec $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}3-1=2\\0-1=-1\end{pmatrix}$.

Ne vous affolez pas si vous avez un autre vecteur directeur lié à d'autre choix de points appartenant à $\mathscr{D}$: une droite admet une infinité de vecteurs directeurs deux à deux colinéaires !!!



b) Le point $B(51\ ;-24)$ appartient-il à la droite $\mathscr{D}$? Même question avec $C(-150\ ;\ 76)$.

Réponse : Testons si les coordonnées de B vérifient l'équation : $x + 2y - 3 = 0$ sachant qu'ici, $B(51\ ;\ -24)$, donc $x = 51$ *et* $y = -24$.

Donc, ici, $x + 2y - 3 = 51 + 2\times(-24) - 3 = 51 - 48 - 3 = 3 - 3 = 0$.

Ainsi $B(51\ ;\ -24)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ puisque les coordonnées de B vérifient l'équation de cette droite.

On n'affirme pas d'emblée que $x + 2y - 3 = 0$! Il faut vérifier si cette relation est vraie ou fausse pour les coordonnées du point donné dans l'énoncé, ici, avec $x = 51$ et $y = -24$.

Testons si les coordonnées de C vérifient l'équation : $x + 2y - 3 = 0$ sachant qu'ici, $B(-150\ ;\ 76)$, donc $x = -150$ *et* $y = -76$.

Donc, ici, $x + 2y - 3 = -150 + 2\times 76 - 3 = -150 + 152 - 3 = 2 - 3 = -1$. *Or* $-1 \neq 0$

Donc $C(-150\ ;\ 76)$ n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

Exercice 3

Déterminer, ~~par deux méthodes différentes~~, une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $A(-1\ ;\ 2)$ et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.

Solution : *On utilise le théorème XL.*

$\mathscr{D}$ passe par $A(-1;2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

On cherche ici des réels a, b et c tels que : $ax+by+c=0$.

Or $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ dirige la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $ax+by+c=0$

Ici, $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, donc par identification des coefficients, on a : $\begin{cases}-b=-3\\a=4\end{cases}$, donc

$a=4$ et $b=3$.

Par suite, une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ est : $4x+3y+c=0$.

Il reste à déterminer la valeur du réel c :

Or $A(-1;2)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$, donc on a : $4x_A+3y_A+c=0$ avec ici :

$x_A=-1$; $y_A=2$, donc : $4\times(-1)+3\times2+c=0$, donc $-4+6+c=0$; $2+c=0$

donc $c=-2$.

Ainsi, une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ est : $\boxed{4x+3y-2=0}$

II – Equation réduite d'une droite

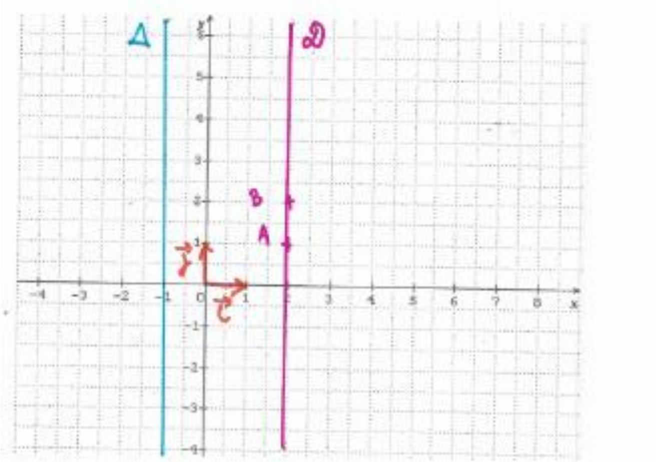
Activité

1) Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(2\ ;1)$ et dirigée par $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. La tracer dans un repère $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$. Quel constat fait-on ? Comment nommeriez-vous une telle droite ?

Solution : commencer par placer les vecteurs directeurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dirigeants respectivement l'axe des abscisses et celui des ordonnées.

Le tracé est alors évident : $\mathscr{D}$ passe par $A(2\ ;1)$ et par $B(2\ ;\ 2)$.

Une telle droite est parallèle à l'axe des ordonnées. On aimerait la nommer droite "verticale".



2) Soit Δ la droite dont une équation cartésienne est : $x+1=0$. Trouver un vecteur directeur de Δ et la construire dans le repère $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$. Constat ?

Solution : $x+1=0$ s'écrit encore sous la forme : $1x+0y+0=0$, c'est-à-dire de la forme $ax+by+c=0$ avec : $a=1$, $b=0$ et $c=0$. La connaissance du cours et celle de la définition qui succède au théorème XL permet de dire que la droite Δ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b=-0=0\\a=1\end{pmatrix}$ c'est-à-dire que Δ est encore dirigée par le vecteur $\vec{j}$.

Là encore, on constate que la droite Δ est parallèle à l'axe des ordonnées, donc "verticale".

3) Soit d la droite dont une équation cartésienne est : $x+2y-1=0$.

Expliquer pourquoi cette droite est non parallèle à l'axe des ordonnées.

Isoler y dans l'équation cartésienne de d.

Solution : $x+2y-1=0$ s'écrit : $1x+2y-1=0$, donc ici, de la forme $ax+by+c=0$ avec : $a=1$ et $b=2$ et $c=-1$.

Le cours nous enseigne que $\vec{u}\begin{pmatrix}-b=-2\\a=1\end{pmatrix}$ dirige la droite d.

L'axe des ordonnées est dirigé par $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$: clairement, $\vec{u}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires car

$det(\vec{u}\ ;\ \vec{j}) = -2$ et $-2 \neq 0$ (je vous laisse le soin de faire ce calcul).

Donc la droite d et l'axe des ordonnées ne sont pas parallèles.

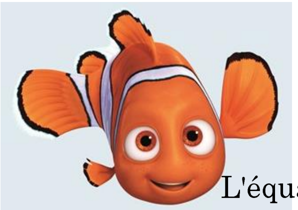
Facile : qui a dit qu'on allait bouffer des équations jusqu'à la fin de l'année ? Le dog !

$x + 2y - 1 = 0$, donc $2y = -x + 1$, donc $\boxed{y} = \dfrac{-x+1}{2} = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} = \boxed{-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}}$.

♥♥♥ Propriété et définition ♥♥♥

Dans un repère orthogonal :

- toute droite $\mathscr{D}$ ***non verticale*** du plan admet une unique équation de la forme : $\boldsymbol{y = mx + p}$.
  Cette dernière équation est appelée ***l'équation réduite*** de la droite $\mathscr{D}$.
- Toute droite ***verticale*** admet une unique équation de la forme : $\boldsymbol{x = k}$ où k est un réel.

L'équation est ***réduite*** lorsque ***y est isolé***, c'est-à-dire $y = mx + p$.

Tous les points appartenant à une ***même droite verticale ont la même abscisse***, d'où la forme des équations des droites verticales : $x = k$.

Preuve :

$\mathscr{D}$ est une droite du plan, donc elle admet comme équation cartésienne : $ax + by + c = 0$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

De plus, $\mathscr{D}$ n'est pas verticale, donc $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc $\det(\vec{u}\ ,\ \vec{j}) \neq 0$

Donc $\begin{vmatrix}-b & 0\\ a & 1\end{vmatrix} \neq 0$ donc $-b \times 1 - a \times 0 \neq 0$ donc $-b \neq 0$, donc $b \neq 0$.

Par suite : $ax + by + c = 0$ équivaut à : $by = -ax - c$ et donc comme $b \neq 0$, on peut effectuer la division par b : $y = \dfrac{-ax-c}{b} = -\dfrac{a}{c}x + \left(-\dfrac{c}{b}\right)$.

En posant : $m = -\dfrac{a}{b}$ et $p = -\dfrac{c}{b}$ on obtient : $\boldsymbol{y = mx + p}$.

Si Δ est une droite verticale, alors $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dirige Δ qui admet donc pour équation cartésienne ($-b = 0$ et $a = 1$ donc $a = 1$ et $b = 0$) : $1x + 0y + c = 0$ où c est un réel, donc $x + c = 0$ donc $x = -c$.
En posant $k = -c$, on obtient pour équation de Δ : $\boldsymbol{x = k}$.

Remarques : toute droite du plan admet des équations cartésiennes.

Seules les droites non verticales du plan admettent une équation réduite.

☞☞Une droite est non verticale dès qu'elle contient deux points n'ayant pas la même abscisse.

Fondamental : si une droite $\mathscr{D}$ a pour équation réduite : $y = \boldsymbol{m}x + p$, alors $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Pourquoi ? $y = mx + p$, donc $mx - y + p = 0$
donc $mx + (-1)y + p = 0$.
De la forme : $ax + by + c = 0$ avec : $a = m$; $b = -1$; $c = p$.
donc (# le cours), $\vec{u}\begin{pmatrix}-b = -(-1) = 1\\a = m\end{pmatrix}$ dirige cette droite !

Exemple

1) Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$ qui a pour équation cartésienne : $-10x + 5y + 15 = 0$.

2) Construire dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ d'équation : $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Solution :

1) On isole y dans la relation : $-10x + 5y + 15 = 0$, c'est tout ce qu'il y a à faire !

Pour qui n'a pas bon œil : $-10x + 5y + 15 = 0$ *donc* $5y = 10x - 15$, *donc :* $y = \frac{10x - 15}{5} = \frac{10x}{5} - \frac{15}{5}$

donc $\boxed{y = 2x - 3}$ est l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$.

Pour qui est observateur : chacun des coefficients -10, 5 et 15 de l'équation cartésienne :
$-10x + 5y + 15 = 0$ sont des multiples de 5, donc on commence par simplifier par 5 chacun d'entre eux !
On en a le droit, car si $ax + by + c = 0$, alors $\frac{ax + by + c}{5} = \frac{0}{5} = 0$: je suis en train de vous dire qu'une quantité est nulle si et seulement si le cinquième de cette quantité est nulle, j'espère que c'est une évidence ?!!

Donc : $-10x + 5y + 15 = 0$ se réécrit en : $-2x + 1y + 3 = 0$ et directement, $\boxed{y = 2x - 3}$.

2) *Question classique, à maîtriser !*

Il y a deux façons pour construire une droite :

Méthode 1 : *Construire deux points distincts appartenant à cette droite, puis tracer cette droite.*

Δ a pour équation : $y = \frac{1}{3}x + 1$, donc, je fixe $x = 0$ (c'est un choix, vous pouvez prendre ce que vous voulez comme valeur pour x!!!), et j'obtiens : $y = \frac{1}{3} \times 0 + 1 = 1$, donc le point $A(0\ ;\ 1)$ appartient à la droite Δ.

De même, en faisant $x = 3$ dans la relation : $y = \frac{1}{3}x + 1$, on obtient : $y = \frac{1}{3} \times 3 + 1 = 1 + 1 = 2$, donc le point $B(3\ ;\ 2)$ appartient à la droite Δ .

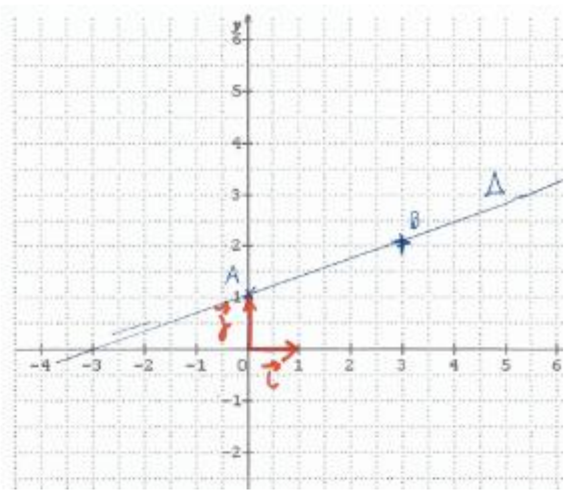
Les deux points A et B étant distincts (ils n'ont pas la même abscisse !), il en résulte que la droite Δ est en fait la droite (AB). Le tracé est alors évident.

Méthode 2 : placer un point appartenant à cette droite puis construire un vecteur directeur de cette droite.

Comme à la méthode 1, $A(0\ ;1)$ appartient à Δ.

D'après le point fondamental de la page ci-dessus, Δ a pour équation : $y = \frac{1}{3}x + 1$, donc $m = \frac{1}{3}$ et

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ dirige Δ ou encore, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ : le tracé s'en suit alors comme déjà vu dans des exercices similaires en amont.



Remarque : la droite $\mathscr{D}$ d'équation réduite : $y = mx + p$ est la courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = mx+p$.

Propriété

Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation réduite : $y = mx+p$.

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points distincts appartenant à $\mathscr{D}$.

Alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{Différence des ordonnées}}{\text{Différence des abscisses (prises dans le même ordre) que les abscisses.}}$

Preuve et illustration :

Preuve :

$\mathcal{D}$ a pour équation réduite : $y = mx + p$.

$A(x_A ; y_A) \in \mathcal{D}$, donc les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite $\mathcal{D}$, à savoir :

$$\boxed{y_A = m x_A + p} \quad (*)$$

De même, $B(x_B ; y_B) \in \mathcal{D}$, donc on a : $\boxed{y_B = m x_B + p} \quad (**)$

Ainsi en faisant $(**) - (*)$ (on soustrait membre à membre ces deux égalités), il vient :

$$y_B - y_A = m x_B + p - (m x_A + p)$$ [Ne pas oublier la parenthèse, on soustrait ici une quantité composée !].

$$y_B - y_A = m x_B + p - m x_A - p$$

$$y_B - y_A = m x_B - m x_A = m(x_B - x_A)$$ en factorisant !

Vu que A et B sont distincts et situés sur $\mathcal{D}$, on a $x_A \neq x_B$, donc $x_B - x_A \neq 0$.

Par suite, en isolant m dans l'égalité : $y_B - y_A = m(x_B - x_A)$, il vient :

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Remarque : on peut aussi dire que $m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$: en effet, on a prouvé que :

$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. or on ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant son numérateur et son dénominateur par -1 : donc $m = \dfrac{-1(y_B - y_A)}{-1(x_B - x_A)} = \dfrac{-y_B + y_A}{-x_B + x_A} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$!

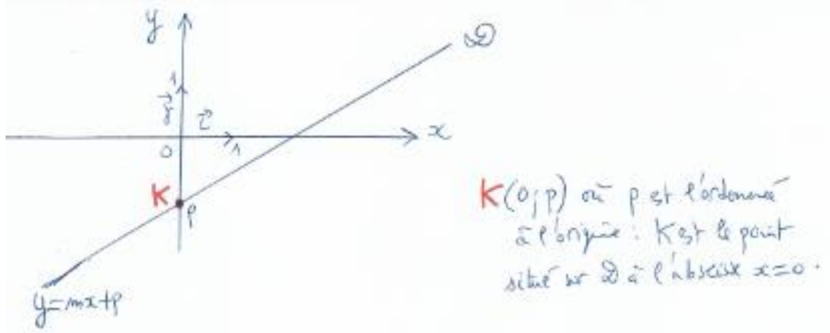
L'essentiel est qu'au numérateur et au dénominateur on prenne les points dans le même ordre !

Définition : ***m*** est appelé ***le coefficient directeur*** (ou encore la pente) ***de la droite $\mathcal{D}$.***

La valeur de m ne dépend pas du choix effectué des deux points appartenant à $\mathcal{D}$ dans le calcul précédent.

p est appelé ***l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$*** : c'est l'ordonnée du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de l'axe des ordonnées.

Illustration :



💣💣On parle de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine uniquement pour des droites non verticales. Les droites verticales n'ont pas de coefficient directeur ni d'ordonnée à l'origine !

<u>Exemple</u>

Déterminer, pour chacune des deux droites suivantes, le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine :

La droite $\mathscr{D}_1$ qui a pour équation réduite : $y = -3x + 1$

<u>Réponse</u> : On a une équation de la forme : $y = mx + p$ avec : $m = -3$ et $p = 1$: le coefficient directeur de cette droite est donc égal à -3 et l'ordonnée à l'origine égale à 1.

La droite $\mathscr{D}_2$ qui a pour équation réduite : $y = x - 2$.

De même, l'équation s'écrit : $y = 1x + (-2)$, donc de la forme : $y = mx + p$, avec : $m = 1$ et $p = -2$.

Le coefficient directeur de cette droite est égal à 1 et son ordonnée à l'origine égale à -2.

La droite $\mathscr{D}_3$ qui a pour équation réduite : $y = 3$.

L'équation s'écrit : $y = 0x + 3$, donc de la forme : $y = mx + p$, avec : $m = 0$ et $p = 3$.

Le coefficient directeur de cette droite est égal à 0 et son ordonnée à l'origine égale à 3.

La droite $\mathscr{D}_4$ qui a pour équation : $3x - 4y + 11 = 0$.

D'abord, on met l'équation de cette droite sous forme d'équation réduite, en isolant y :

$3x - 4y + 11 = 0$ *donc* $4y = 3x - 11$, *donc* $y = \dfrac{3x-11}{4} = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{11}{4} = \dfrac{3}{4}x + \left(-\dfrac{11}{4}\right)$.

Cette équation est de la forme : $y = mx + p$ avec : $m = \dfrac{3}{4}$ et $p = -\dfrac{11}{4}$.

Le coefficient directeur de cette droite est égal à $\dfrac{3}{4}$ et son ordonnée à l'origine est égale à $-\dfrac{11}{4}$.

<u>Remarque fondamentale</u> : les droites dont le coefficient directeur est égal à zéro sont parallèles à l'axe des abscisses, on dira plus simplement qu'elles sont HORIZONTALES, et réciproquement, les droites HORIZONTALES ont pour coefficient directeur zéro.

Exercice 4

Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$ qui passe par le point $K(1\ ;-4)$ et qui a pour coefficient directeur -2.

Solution : $\mathscr{D}$ passe par $K(1;-4)$ et a pour coefficient directeur -2.

$\mathscr{D}$ a pour équation réduite : $y=\boxed{m}x+p$ avec par donnée de l'énoncé, $\boxed{m}=\boxed{-2}=$ coefficient directeur de $\mathscr{D}$.

Donc $\mathscr{D}$ a pour équation réduite : $y=-2x+p$; il nous reste à trouver la valeur de p :

or $K(\underbrace{1}_{x};\underbrace{-4}_{y})\in\mathscr{D}$, donc les coordonnées de K vérifient l'égalité : $y=-2x+p$, avec ici :

$x=1$ et $y=-4$, donc : $-4=-2\times1+p$

$-4=-2+p$

$p=-4+2=-2$

Donc $\boxed{\mathscr{D} \text{ a pour équation réduite : } y=-2x-2}$

Rq : Essayez de savoir faire cet exercice facilement, ça doit vous sembler évident !

Exercice 5

Déterminer l'équation réduite de la droite qui passe par $A(-1\ ;5)$ et $B(4\ ;\ 10)$.

Solution : $A(-1;5)$ et $B(4;10)$.

Vu que $-1\neq4$, (AB) n'est pas verticale : elle admet donc une équation réduite de la forme :

$y=mx+p$: Il nous faut déterminer les réels m et p.

le cours : $\boxed{m}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{10-5}{4-(-1)}=\dfrac{5}{5}=\boxed{1}$

Par suite, (AB) a pour équation réduite : $y=1x+p=x+p$: reste à trouver la valeur p.

OR, $B(\underbrace{4}_{x};\underbrace{10}_{y})\in(AB)$, donc pour $x=4$ et $y=10$, la relation : $y=x+p$ est vérifiée, c'est à dire : $10=4+p$, donc $p=10-4=6$.

Ainsi, $\boxed{(AB) \text{ a pour équation réduite : } y=x+6}$

Exercice 6

Construire dans un repère ***orthonormé*** la droite $\mathscr{D}$ qui passe par $A(-2198\ ;-2202)$ et $B(1892\ ;1888)$.

Solution : Voici un exercice plus sympathique !

Le cœur du problème, ce sont les coordonnées de chacun des points $A(-2198\,;-2202)$ et $B(1892\,;1888)$

Or la droite (AB) passe par une infinité de points, alors pourquoi se borner à vouloir représenter les points A et B ?

Trouvons d'autres points (deux !) à coordonnées plus simples, appartenant à (AB) :

Vu que $-2198 \neq 1892$, $x_A \neq x_B$, donc (AB) n'est pas verticale et a pour équation réduite :

$y = mx + p$.

$A(-2198\,;-2202)$ donc $x_A = -2198$, $y_A = -2202$

$B(1892\,;1888)$ donc $x_B = 1892$, $y_B = 1888$!

le cours : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1888 - (-2202)}{1892 - (-2198)}$

$$\boxed{m} = \frac{1888 + 2202}{1892 + 2198} = \frac{4090}{4090} = \boxed{1}$$

Donc (AB) a pour équation réduite : $y = 1x + p = x + p$

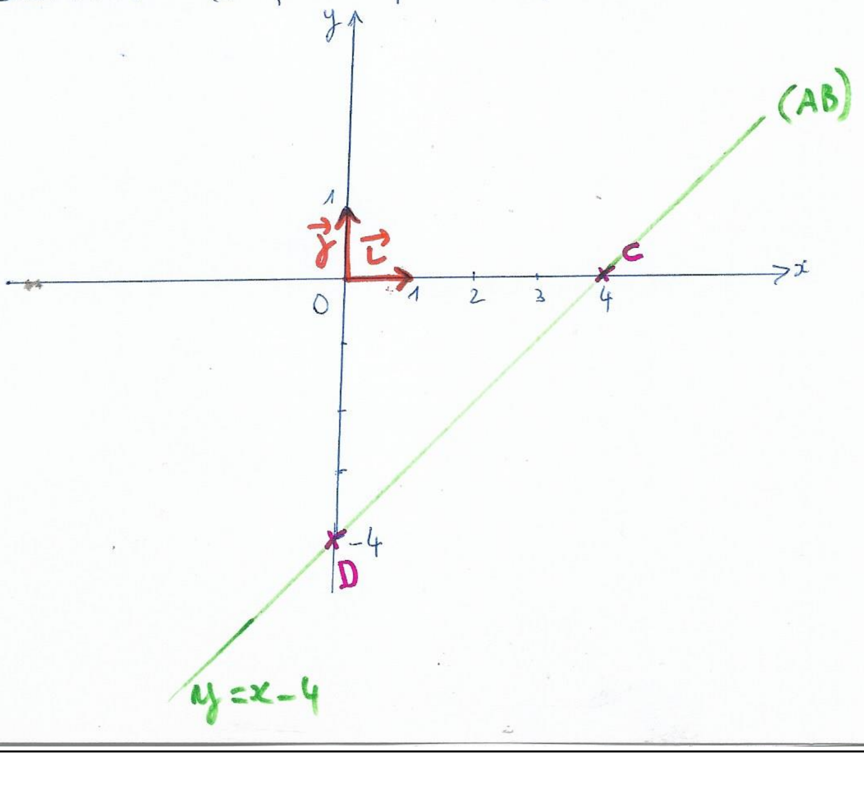
Enfin, $B(1892\,;1888) \in (AB)$, donc $y_B = x_B + p$

$1888 = 1892 + p$

$p = 1888 - 1892 = -4$.

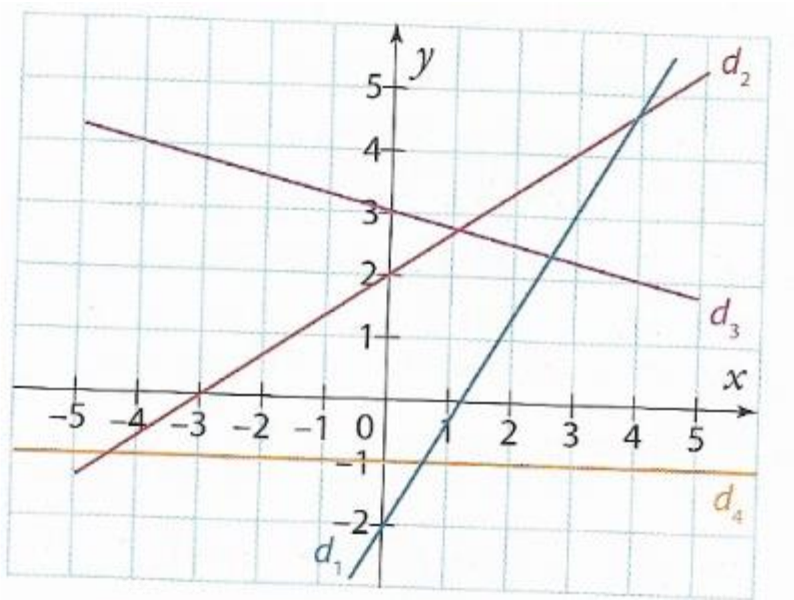
Ainsi, $\boxed{(AB) \text{ a pour équation réduite : } y = x - 4}$

Le tracé évident découle alors : (AB) passe aussi par $C(4\,;0)$ et $D(0\,;-4)$:



Exercice 7 (clé)

Déterminer le coefficient directeur de chacune des droites tracées :



Solution (M1)

Deux façons de procéder : on prend 2 points distincts sur chacune des droites dont on arrive facilement à lire les coordonnées que l'on prend, si possible, ENTIERES.

On applique le cours : Si les points sont $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$, on a :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Prenons la droite d_1 : elle passe par $A(\overset{x_A}{0} ; \overset{y_A}{-2})$ et $B(\overset{x_B}{3} ; \overset{y_B}{3})$.

Donc son coefficient directeur, noté m_1 est : $\boxed{m_1} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-2)}{3-0} = \frac{3+2}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$.

Pour la droite d_2 : elle passe par $C(0 ; 2)$ et $D(3 ; 4)$ par exemple.

Donc son coefficient directeur, noté m_2 est : $\boxed{m_2} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{4-2}{3-0} = \boxed{\frac{2}{3}}$

Rq : Ce n'est pas grave si vous avez pris d'autres points que C et D ! Au final, vous allez quand même trouver $m_2 = \frac{2}{3}$!!

Pour la droite d_3 : elle passe par $E(0 ; 3)$ et par $F(4 ; 2)$ par exemple.

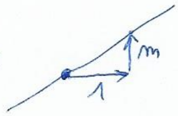
Donc son coefficient directeur, noté m_3 est égal à : $\boxed{m_3} = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{2-3}{4-0} = \boxed{-\frac{1}{4}}$

Enfin, cerise sur le gâteau, pour la droite d_4, il n'y a rien à faire !

Le coefficient directeur de d_4, noté m_4 est égal à 0 car d_4 est horizontale (= parallèle à l'axe des abscisses).

Vous pouvez toujours appliquer la méthode aux points $G(1 ; -1)$ et $H(2 ; -1)$ par exemple si vous n'êtes pas convaincus !!

Méthode 2 :

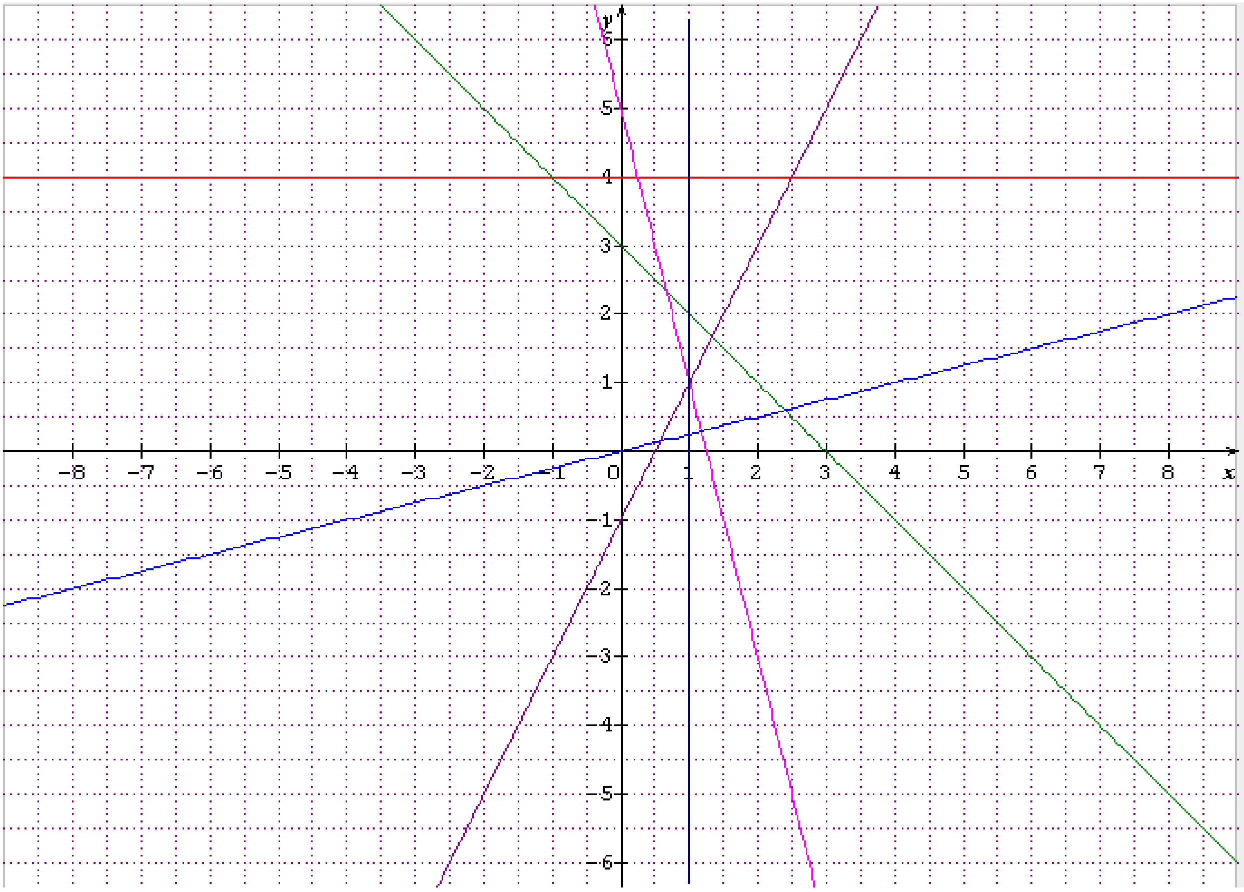


Par le cours, on part d'un point de la droite en question. Chaque fois qu'on "avance" d'une unité à l'horizontale (⟷) on "monte" de m unités à la verticale (↕) où m est exactement le coefficient directeur de la droite cherchée.

Ici, pour d_1, d_2, d_3, cette technique donnerait des valeurs moins précises que celles trouvées car à chaque fois on n'est pas à l'intersection de deux carreaux.

Exercice 8 (clé)

Déterminer une équation de chacune des droites suivantes, par lecture graphique :



Oubli : par lecture graphique !

Nommons d_1 la droite rouge : on commence par du basique, d_1 est horizontale, c'est comme je disais avant, la droite qui passe à l'altitude 4, maintenant, plus rigoureusement, on dira que d_1 a pour équation réduite : $y = 4$.

💣💣Attention, je ne veux pas voir : $d_1 = -4$ qui n'a aucun sens : une droite et un nombre, ce n'est quand même pas tout à fait pareil !!!

Nommons d_2 la droite bleue : elle n'est pas verticale donc a pour équation : $y = mx + p$.

Elle passe par $O(0\,;0)$, donc par définition de l'ordonnée à l'origine, $p = 0 =$ ordonnée du point de la droite situé sur l'axe des ordonnées ! p se lit graphiquement très simplement !

Pour m : Partons de l'origine, point situé sur la droite bleue : on avance de 4 unités à l'horizontale et on monte de 1 unité à la verticale pour arriver à un nouveau point de d_2 nommé R$(4\,;1)$: placez le !

Si on se souvient que $m =$ variation des ordonnées / variation des abscisses, le tour est joué :

$m = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Variation en maths signifie différence !

Bien évidemment, on aurait pu dire : on part de $O(0\,;\,0)$, on avance de 2 unités à l'horizontale et on monte de 0,5 unités à la verticale, donc $m = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25$.

En conclusion, d_2 a pour équation réduite : $y = 0{,}25x + 0$ c'est-à-dire : $y = 0{,}25x$.

Nommons d_3 la droite verticale bleue foncé : si vous relisez ce que dit *Némo page* 8, cette droite a pour équation : $x = k$: comment trouve-t-on k ? Regardez, tous les points de la droite d_3 ont même abscisse égale à 1, donc d_3 a pour équation : $x = 1$.

Nommons d_4 *la droite verte :* elle n'est pas verticale donc a pour équation réduite : $y = mx + p$.

Je redis que la valeur de p, se lit graphiquement sur l'axe des ordonnées : plus précisément p *est* l'ordonnée du point d'intersection de la droite d_4 et de l'axe des ordonnées, donc $p = 3$.

Pour m *:* partons du point $K(0 ; 3)$ *:* placez le *!* On avance de 3 unités à l'horizontale, et on descend de 3 unités à la verticale, pour arriver au point $L(3 ; 0)$ situé sur d_4.

Ainsi $m = -\frac{3}{3} = -1$. Pourquoi -3 ? On a descendu de 3, donc -3, c'est comme pour les coordonnées de vecteurs !

Ainsi, d_4 a pour équation réduite : $y = -1x + 3$ ou encore : $\boxed{y = -x + 3}$.

Notons d_5 la droite violette foncée "qui monte" : non verticale, elle a pour équation réduite : $y = mx + p$. Trouver l'équation réduite de cette droite revient à trouver la valeur de m et celle de p !

on a $p = -1$ et pour trouver m : partons du point $M(0 ; -1)$ (placez le !) situé sur d_5. On avance par exemple de 1 à l'horizontale, et on monte de 2 unités à la verticale pour se retrouver en le point nommé $N(1 ; 1)$: ainsi : $m = \frac{2}{1} = 2$.

Par suite d_5 a pour équation réduite : $\boxed{y = 2x - 1}$.

Enfin, nommons d_6 la droite rose : elle a pour équation : $y = mx + p$ car non verticale avec :

$p = 5$ (regardez où cette droite croise l'axe des ordonnées).

$m = ?$

Partons du point $Z(0 ; 5)$ et allons au point $N(1 ; 1)$ qui est également situé sur d_6 aussi :

Pour aller de Z à N, on avance de 1 unité à l'horizontale, et on descend de 4 unités à la verticale.

Donc $m = -\frac{4}{1} = -4$.

Par suite, l'équation réduite de d_6 est : $\boxed{y = -4x + 5}$

Rappel : Lorsqu'on a deux droites $\mathscr{D}$ et Δ du plan, on sait depuis le collège que soit:

- $\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes (et se coupent en un point) : illustration :

- $\mathscr{D}$ et Δ sont strictement parallèles : illustration :

- $\mathscr{D}$ et Δ sont confondues : illustration :

Etudier la position relative de deux droites du plan, revient à ***déterminer dans lequel des trois cas rappelés ci-dessus on se trouve.***

> ***Propriété***
>
> Deux droites $\mathscr{D}$ et Δ du plan sont parallèles si et seulement si :
>
> Elles ***sont toutes les deux verticales*** ***ou bien*** elles ***ont le même coefficient directeur***.

Preuve :

Il est clair que si deux droites sont verticales, étant toutes les deux perpendiculaires à l'axe des abscisses, elles sont parallèles !
Soient $\mathscr{D}$ et Δ et deux droites non verticales :
$\mathscr{D}$ a donc pour équation réduite : $y = mx + p$ et Δ a pour équation réduite : $y = m'x + p'$.
On utilise des primes car on ne sait pas a priori si les coefficients directeurs m et m' sont égaux ou pas.

D'après le point fondamental de la page 9, on peut dire que : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}$ dirige $\mathscr{D}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1\\ m'\end{pmatrix}$ dirige Δ.

$\mathscr{D}$ et Δ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à dire que

$det(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{u'}) = 0$ avec : $det(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{u'}) = \begin{vmatrix}1 & 1\\ m & m'\end{vmatrix} = 1\times m' - m\times 1 = m' - m$.

$det(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{u'}) = 0$ équivaut donc à dire que $m' - m = 0$, à savoir que $m = m'$.

Ainsi, deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur !

Remarque : si $\mathscr{D}$ a pour équation : $y = mx + p$ et Δ a pour équation : $y = m'x + p$, alors :

- $\mathscr{D}$ et Δ sont strictement parallèles si et seulement si : ***$m=m'$ et $p \neq p'$.***

- $\mathscr{D}$ et Δ sont confondues si et seulement si : ***$m=m'$ et $p=p'$.***

- $\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes si et seulement si : ***$m\neq m'$.***

Exercice9

Etudier la position relative des droites suivantes :

1) d_1 a pour équation : $y = 3x - 4$ et d_2 a pour équation : $y = 3x + 8$.
2) Δ_1 a pour équation : $y = 2x + 3$ et Δ_2 a pour équation : $6x - 3y + 9 = 0$.
3) $\mathscr{D}_1$ a pour équation : $y = x$ et $\mathscr{D}_2$ a pour équation : $y = -x + 1$.

Solution :

1) Tout bébête, juste pour voir si vous tenez compte de la remarque précédente :

d_1 a pour coefficient directeur $m = 3$, et d_2 a pour coefficient directeur $m = 3$ également. Vu que d_1 et d_2 n'ont pas la même ordonnée à l'origine ($-4 \neq 8$), il en résulte que les droites d_1 *et* d_2 *sont strictement parallèles.*

2) *Commençons par donner l'équation réduite de* Δ_2 :

$6x - 3y + 9 = 0$ équivaut à $3y = 6x + 9$, donc $y = \dfrac{6x+9}{3} = 2x + 3$.

Ainsi, Δ_1 et Δ_2 sont confondues car elles ont la même équation réduite, et donc, le même coefficient directeur et la même ordonnée à l'origine

3) $\mathscr{D}_1$ a pour coefficient directeur $m = 1$, et $\mathscr{D}_2$ a pour coefficient directeur $m' = -1$.
Ainsi, ces deux droites sont sécantes vu qu'elles ont des coefficients directeurs différents.

Remarque : lorsque deux droites dont on a des équations sont sécantes, il est assez naturel de chercher à déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites. C'est l'un des objectifs du paragraphe suivant.

III – Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

Un exemple d'introduction :

On dispose d'un stock de stylos tous identiques, et de crayons tous identiques.

4 stylos et un crayon coûtent 10,40€, tandis que 2 stylos et 3 crayons coûtent 9,20€.

A l'aide de ces informations, nous allons dégager une méthode qui va nous permettre de trouver à quel prix est vendu chaque stylo et chaque crayon.

Mise en équation : *Soit x le prix d'un stylo, et y le prix d'un crayon (en euro) :*

4 stylos et un crayon coûtent 10,40€ se traduit par l'équation : $4x + 1y = 10{,}40$.

2 stylos et 3 crayons coûtent 9,20€ se traduit par l'équation : $2x + 3y = 9{,}20$.

Ainsi, les informations de l'énoncé se traduisent par : $\begin{cases} 4x + y = 10{,}4 \\ 2x + 3y = 9{,}2 \end{cases}$.

Cet exemple sera résolu dans la suite, après avoir dégagé des méthodes de résolution.

Définition

On appelle système linéaire de deux équations à deux inconnues, tout ensemble formé par deux équations, où figurent, dans chacune, deux inconnues, notées x et y, [les inconnues étant sans puissance]. On note avec une accolade un tel système.

Par exemple : $\begin{cases} 2x+4y=-5 \\ x+0,2y=11, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{4}x+5y-\sqrt{2}=0 \\ -2x+5y+13,1= \end{cases}$ sont des systèmes de deux équations à deux inconnues. On dira seulement système dans toute la suite.

Définition

On appelle ***solution*** du système, tout ***couple*** de réels $(x\,;y)$ tel que ***chacune des deux égalités*** figurant dans le système soit ***vraie***. Attention à l'ordre des valeurs dans un couple !

On considère le système suivant : $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$

Le couple (3 ; 1) est-il solution du système *précédent* ? Même question avec le couple ($\frac{9}{7}$; $\frac{13}{7}$).

Méthode :

Pour le couple (3 ; 1) on a : x = 3 et y = 1.

On remplace x par 3 et y par 1, et on teste, si pour ces valeurs, CHACUNE des deux égalités :

x + 2y – 5 = 0 et 3x – y – 2 = 0 est VRAIE ou FAUSSE : si chacune des deux égalités est VRAIE, alors on conclut en disant que le couple en question (3 ; 1) est solution du système.

Sinon, si au moins une des deux égalités est FAUSSE, on conclut en disant que le couple (3 ; 1) n'est pas solution du système. Dès qu'une égalité est fausse, il est inutile de vérifier si l'autre est vraie ou fausse, le couple en question ne sera pas solution du système !!!

Ici :

Lorsque x = 3 et y = 1 : x + 2y – 5 = 3 + 2 1 – 5 = 5 – 5 = 0, donc la première égalité est vraie.

Lorsque x =3 et y = 1: 3x – y – 2 = 3 3 – 1 – 2 = 9 – 3 = 6 et 6 0, donc la seconde égalité est fausse.

Par suite, le couple (3 ; 1) n'est pas solution du système : $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$.

Pour le couple ($\frac{9}{7}$ ***;*** $\frac{13}{7}$ ***) on a : x =*** $\frac{9}{7}$ ***et y =*** $\frac{13}{7}$ ***.***

Donc : $x + 2y - 5 = \frac{9}{7} + 2\times\frac{13}{7} - 5 = \frac{9}{7} + \frac{26}{7} - 5 = \frac{35}{7} - 5 = 5 - 5 = 0$ **:**

la première égalité est vraie lorsque $x = \frac{9}{7}$ ***et*** $y = \frac{13}{7}$.

N'oublions pas de vérifier si la seconde égalité est vraie ou fausse :

Lorsque $x = \frac{9}{7}$ ***et*** $y = \frac{13}{7}$ ***on a :*** $3x - y - 2 = 3\times\frac{9}{7} - \frac{13}{7} - 2 = \frac{27}{7} - \frac{13}{7} - 2 = \frac{14}{7} - 2 = 2 - 2 = 0.$

La seconde égalité est vraie lorsque $x = \frac{9}{7}$ ***et*** $y = \frac{13}{7}$.

<u>Conclusion</u> : le couple $(\frac{9}{7} ; \frac{13}{7})$ est solution du système : $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$.

Une question légitime : le couple $(\frac{9}{7} ; \frac{13}{7})$ est-il le ***seul*** couple solution du précédent système ?

<u>Définition</u>

Résoudre un système, c'est ***déterminer*** tous les éventuels ***couples de solution*** du système.

Deux systèmes d'équations sont dits ***équivalents*** lorsqu'ils ont ***le même ensemble de solutions***.

On ***transforme*** un système en un ***système équivalent*** en faisant des opérations licites sur chacune de ses équations : ces opérations sont : ajout d'un même nombre dans chacun des membres d'une égalité, multiplication de chacun des membres par le même réel non nul, permutation des lignes du système, remplacement d'une ligne par la somme ou la différence des deux autres….

☝ ***Résolution d'un système par la méthode de substitution***

Résoudre le système : $\begin{cases} 3x-y+1=0 \\ x+3y+2=0 \end{cases}$

En français, se substituer à une personne signifie remplacer cette personne.
A l'époque de vos grands parents, la méthode que nous allons ici voir s'appelait méthode de remplacement.

<u>Méthode de substitution</u> :

<u>Etape 1</u> : *On isole dans une des deux équations du système (de son choix) une inconnue de son choix.*

<u>Etape 2</u> : *On remplace (= substitue) dans l'autre ligne du système l'inconnue que l'on a isolée par la quantité qui lui est égale : on se retrouve alors ici avec une équation à une seule inconnue que l'on résout.*
On n'oublie pas de déterminer enfin la valeur de l'inconnue isolée et de conclure sur l'ensemble de solutions du système avec à la fin : $\mathcal{S} =$

Remarque : A priori, il y a donc quatre possibles : isoler x dans la première équation, isoler y dans la première équation, isoler x dans la seconde équation, ou bien isoler y dans la seconde équation.

1° choix : on isole x dans la première équation : $3x - y + 1 = 0$, donc $3x = y - 1$, donc $x = \dfrac{y-1}{3}$.

2° choix : on isole y dans la première équation : $3x - y + 1 = 0$, donc $y = 3x + 1$.

3° choix : on isole x dans la seconde équation : $x + 3y + 2 = 0$, donc $x = -3y - 2$.

4° choix : *on isole y dans la seconde équation :* $x + 3y + 2 = 0$, donc $3y = -x - 2$, donc $y = \dfrac{-x-2}{3}$.

En pratique, ce qui va influencer votre choix, et qui ne doit pas être perdu de vue, c'est qu'on essaie de faire le moins de calculs possibles, en évitant les divisions.
On ne demande pas d'expliciter les 4 choix, mais de faire celui qui vous semble générer le moins de calculs possibles !!!
On génère un minimum de calculs lorsqu'on a comme coefficient multiplicatif d'une inconnue 1 ou −1.

Ici, ***le 2° choix est le plus pertinent*** : pas de fractions, et aucun signe moins

Le 3° choix l'était aussi, avec le risque d'introduire plein de signes moins avec : $x = -3y - 2$ et de se tromper dans l'étape suivante.

Avec le 2° choix, résolvons le système :

$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ x + 3\underbrace{(3x+1)}_{y} + 2 = 0 \end{cases}$$

(Présence de parenthèses car on multiplie 3 par la quantité composée $3x+1$)

En développant dans la 2e ligne : $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ x + 9x + 3 + 2 = 0 \end{cases}$ ← équation où ne figure qu'une seule inconnue.

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ 10x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ 10x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ x = \frac{-5}{10} = -0{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -0{,}5 \\ y = 3x + 1 = 3 \times (-0{,}5) + 1 = -1{,}5 + 1 = -0{,}5 . \end{cases}$$

on échange l'ordre des deux lignes

Donc $S = \{(\underbrace{-0{,}5}_{x} ; \underbrace{-0{,}5}_{y})\}$

On met toujours dans le couple x en 1re position et y en 2ème position.

on peut aussi dire et écrire : le couple $(-0{,}5 ; -0{,}5)$ est l'unique solution du système : $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$

Exercice 10

Résoudre par la méthode de substitution le système suivant : $\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 7x + y = 12 \end{cases}$

Solution :

$\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 7x + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y + 2 \\ 7(5y+2) + y = 12 \end{cases}$ (ici on choisit d'isoler x dans la première équation)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y + 2 \\ 35y + 14 + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y + 2 \\ 36y = 12 - 14 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{36} = -\frac{1}{18} \\ x = 5y + 2 = 5 \times \left(-\frac{1}{18}\right) + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{18} \\ x = -\frac{5}{18} + 2 = \frac{-5}{18} + \frac{36}{18} = \frac{31}{18} \end{cases}$

$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{31}{18} ; -\frac{1}{18} \right) \right\}$

(!) x en 1re position, y en 2ème position.

(!) Solutions en valeurs exactes, pas de valeurs approchées !

Remarque : Si aucun des coefficients multiplicateurs des inconnues x ou y n'est égal à 1 ou –1, la méthode de substitution engendre souvent des calculs un peu plus lourds.

Ce serait par exemple le cas avec le système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y + 7 = 0 \\ 5x + 6y - 11 = 0 \end{cases}$.

Nous allons voir une autre méthode de résolution des systèmes, parfois très pratique et efficace.

Résolution d'un système par la méthode de combinaison linéaire.

On se souvient au préalable, que lorsqu'on a une équation, on peut la transformer en une équation équivalente en multipliant son membre de gauche et son membre de droite par le MEME nombre non nul.

Méthode de combinaison :

Etape 1 : On multiplie la première ligne par un nombre bien choisi, et la seconde par un autre nombre bien choisi, de telle sorte à faire apparaître le même coefficient multiplicateur de x dans chacune des deux lignes.

Etape 2 : On soustrait alors les deux égalités obtenues membre à membre, et l'inconnue x disparait, on trouve la valeur de y, et enfin celle de x.

Remarque : bien évidemment, on aurait pu choisir de faire apparaître le même coefficient multiplicateur de y dans chacune des deux lignes.

Résolvons le système : $\begin{cases} 3x + 2y + 7 = 0 \\ 5x + 6y - 11 = 0 \end{cases}$ par la méthode de combinaison.

Le coefficient des x de la première ligne est 3, celui des x de la seconde ligne est 5.
Or, un entier qui est à la fois multiple (= dans la table de multiplication) de 3 et de 5 est 15 par exemple.
On multiplie donc la première ligne par 5 et la seconde par 3.

$$\begin{cases} 3x+2y+7=0 \\ 5x+6y-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(3x+2y+7)=5\times 0=0 \\ 3(5x+6y-11)=3\times 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{15}x+10y+35=0 \\ \mathbf{15}x+18y-33=0 \end{cases}$$

Ici, on effectue l'opération : ligne 2 moins ligne 1, en conservant intacte la ligne 1.

$$\begin{cases} 15x+10y+35=0 \\ 15x+18y-33-(15x+10y+35)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x+10y+35=0 \\ 15x+18y-33-15x-10y-35=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x+10y+35=0 \\ 8y-68=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y=68 \\ 15x+10y+35=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{68}{8}=\frac{34}{4}=\frac{17}{2} \\ 3x+2y+7=0 \end{cases}$$

(on a divisé par 5 la ligne2 pour avoir les coefficients les plus petits possibles).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{17}{2} \\ 3x+2\times\frac{17}{2}+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{17}{2} \\ 3x+17+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{17}{2} \\ 3x=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{17}{2} \\ x=\frac{-24}{3}=-8 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{(-8\ ;\ \tfrac{17}{2})\}.}$$

Application à la résolution de problème

Exercice 1

Résoudre le problème posé en introduction du paragraphe *III*.

Solution : On avait déjà mis en équation le problème à la page 20. Pour rappel :

Mise en équation : Soit x le prix d'un stylo, et y le prix d'un crayon (en euro) :

4 stylos et un crayon coûtent 10,40€ se traduit par l'équation : $4x + 1y = 10{,}40$.

2 stylos et 3 crayons coûtent 9,20€ se traduit par l'équation : $2x + 3y = 9{,}20$.

Ainsi, les informations de l'énoncé se traduisent par : $\begin{cases} 4x+y=10{,}4 \\ 2x+3y=9{,}2 \end{cases}$.

Résolvons ce système, en choisissant ici, par exemple, la méthode de substitution (qui en règle générale, est plus simple à conduire que la méthode de combinaison) :

$$\begin{cases} 4x+y=10{,}4 \\ 2x+3y=9{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

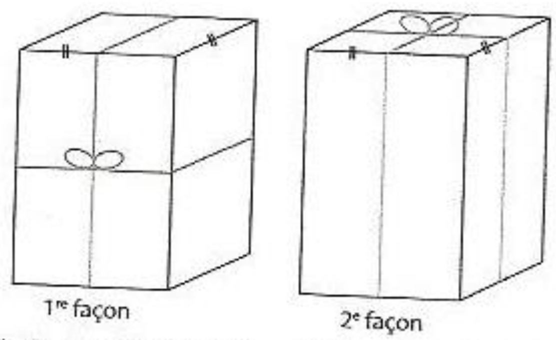
$$\begin{cases} y=10{,}4-4x \\ 2x+3(10{,}4-4x)=9{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10{,}4-4x \\ 2x+31{,}2-12x=9{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10{,}4-4x \\ -10x=9{,}2-31{,}2=-22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-22}{-10}=2{,}2 \\ y=10{,}4-4\times 2{,}2=10{,}4-8{,}8=1{,}6 \end{cases}$$

$\mathscr{S} = \{(2{,}2\ ;\ 1{,}6)\}$.

Conclusion : chaque stylo coûte 2,20€ et chaque crayon coûte 1,60€.

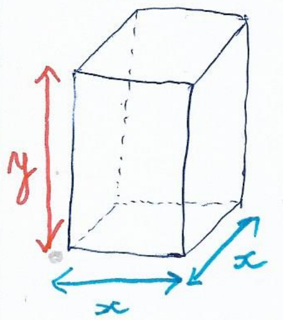
Exercice 12

Un paquet a la forme d'un parallélépipède ayant deux faces carrées.



Pour le ficeler selon la 1re façon, il faut 3 m de ficelle en comptant 46 cm pour un nœud.
Pour le ficeler selon la 2e façon, il faut 3,3 m de ficelle en comptant toujours 46 cm pour un nœud.
Quelles sont les dimensions du paquet ?

Solution :



Soit x la longueur en cm des côtés des carrés de chaque base.

Soit y la hauteur en cm du pavé droit.

En ficelant de la 1re façon on a :

$$6x + 2y + 46 = 300 \qquad (3\,m = 300\,cm).$$

la ficelle passe six fois suivant un côté des carrés et 2 fois suivant la hauteur du pavé.

En ficelant de la 2ème façon, on a : $4x + 4y + 46 = 330$ (3,3 m = 330 cm).

la ficelle passe ici 4 fois suivant un côté des carrés et 4 fois suivant la hauteur du pavé.

Ainsi, x et y sont solutions du système :

$$\begin{cases} 6x + 2y + 46 = 300 \\ 4x + 4y + 46 = 330 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 2y + 46 - 300 = 0 \\ 4x + 4y + 46 - 330 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x + 2y - 254 = 0 \\ 4x + 4y - 284 = 0 \end{cases}$$

En divisant par 2 la première ligne, et par 4 la seconde ligne, on a :

$$\begin{cases} 3x + y - 127 = 0 \\ x + y - 71 = 0 \end{cases} \quad \text{: Par substitution :} \begin{cases} y = -3x + 127 \\ x + (-3x + 127) - 71 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 127 \\ -2x + 56 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{56}{2} = 28 \\ y = -3x + 127 = -3 \times 28 + 127 = -84 + 127 = 43. \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(28 ; 43)\}.$$

Le paquet a donc une base carrée de 28 cm et pour hauteur 43 cm.

Remarque importante : lien entre résolution de système et équations de droites.

Considérons le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$.

Soit $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation cartésienne : $3x - y + 1 = 0$ et $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation : $x + 3y + 2 = 0$.
Un point $M(x\ ;y)$ appartient à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ si et seulement si le couple $(x\ ;y)$ formé par ses coordonnées est solution du système $\mathcal{S}$.

Ainsi, résoudre le système $\mathcal{S}$ revient géométriquement à déterminer les *COORDONNEES des éventuels points d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.*

Dans les exercices, il sera assez naturel de d'abord ***prévoir,*** avant de résoudre le système, s'il a une unique solution, aucune solution ou une infinité de solutions.

Propriété

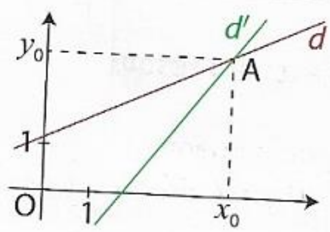
On suppose que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ et $(a'\,;b') \neq (0\,;0)$ et on s'intéresse au système **(S)** $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$
Dans un repère orthonormé, $ax + by + c = 0$ est une **équation cartésienne** d'une droite d et $a'x + b'y + c' = 0$ est une **équation cartésienne** d'une droite d'.

$\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d, $\vec{v}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'.

$$\boldsymbol{det(\vec{u},\vec{v})} = \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -ba' - (-b')a = \boldsymbol{ab' - a'b.}$$

La nullité ou non nullité du déterminant précédent nous permet de dire :

1er***cas :***

$ab' - a'b \neq 0$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

d et d' sont sécantes en un point $A(x_0\,;y_0)$.
Le système **(S)** **a un seul couple solution** : $(x_0\,;y_0)$. $\mathcal{S} = \{(x_0;y_0)\}$

$\underline{2^{ème}\ cas}$: $ab' - a'b = 0$.

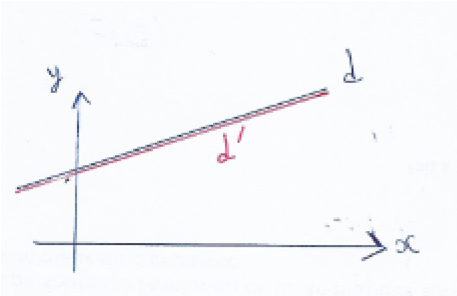
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

d et d' sont parallèles au sens large.

<u>Plus précisément</u> : si le tableau suivant est un tableau de proportionnalité, alors les droites d et d' sont confondues.

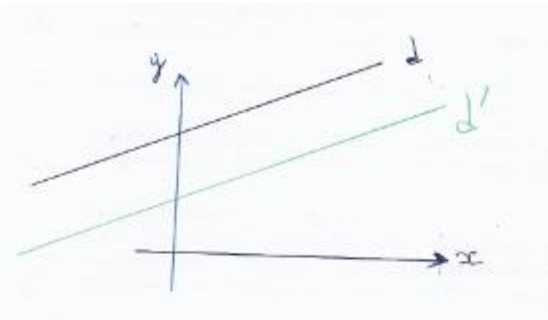
a	***b***	***c***
a'	***b'***	***c'***

Illustration :



Sinon elles sont strictement parallèles.

Illustration :



Exercice 13

Soit d_1 la droite d'équation cartésienne : $2x + y + 5 = 0$ et d_2 la droite d'équation cartésienne $3x + 4y - 2 = 0$.

Etudier la position relative de ces deux droites en étant le plus précis possible !

Solution :

d_1 a pour équation cartésienne : $2x+y+5=0$, de la forme $ax+by+c=0$ avec $a=2$ et $b=1$ (et $c=5$).

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix} -b=-1 \\ a=2 \end{pmatrix}$ dirige d_1.

d_2 a pour équation cartésienne : $3x+4y-2=0$ (ici $a=3$ et $b=4$).

donc $\vec{v}\begin{pmatrix} -b=-4 \\ a=3 \end{pmatrix}$ dirige d_2.

Or $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1\times3-2\times(-4) = -3+8=5$ et $5\neq 0$.

Par suite, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 sont sécantes en un point nommé M dont nous allons déterminer les coordonnées.

$M(x;y)\in d_1\cap d_2 \iff \begin{cases} 2x+y+5=0 \\ 3x+4y-2=0 \end{cases}$ on résout ce système par la méthode de substitution.

$\iff \begin{cases} y=-2x-5 \\ 3x+4(-2x-5)-2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-2x-5 \\ 3x-8x-20-2=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y=-2x-5 \\ -5x-22=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -5x=22 \\ y=-2x-5 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{22}{-5}=-4{,}4 \\ y=-2\times(-4{,}4)-5 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=-4{,}4 \\ y=8{,}8-5=3{,}8. \end{cases}$ $\boxed{S=\{(-4{,}4\,;\,3{,}8)\}}$

d_1 et d_2 se coupent en le point $M(-4{,}4\ ;\ 3{,}8)$.

Exercice 14

a) Soit d_1 la droite d'équation cartésienne : $3x - y - 9 = 0$ et d_2 la droite d'équation cartésienne $-6x + 2y - 15 = 0$.

Etudier la position relative de ces deux droites en étant le plus précis possible !

b) Même question avec les droites d et d' d'équations réduites respectives : $y = -5x + 2$ et $y = 3x - 2$.

Solution :

a) d_1 a pour équation cartésienne : $3x - y - 9 = 0$ donc $\boxed{y = 3x - 9 \text{ est l'équation réduite de } d_1}$

d_2 a pour équation cartésienne : $-6x + 2y - 15 = 0$, donc $2y = 6x + 15$ et $y = \frac{6x+15}{2} = \frac{6x}{2} + \frac{15}{2}$

$\boxed{d_2 \text{ a pour équation réduite : } y = 3x + \frac{15}{2}}$

Ainsi d_1 et d_2 ont le même coefficient directeur $m = 3$, et des ordonnées à l'origine différentes $\left(-9 \neq \frac{15}{2}\right)$

A ce titre, $\boxed{d_1 \text{ et } d_2 \text{ sont strictement parallèles}}$

b) Ici d a pour coefficient directeur $m = -5$ et d' a pour coefficient directeur $m' = 3$.

Or $-5 \neq 3$, donc d et d' sont sécantes.

Soit $M(x;y)$ le point d'intersection des droites d et d' :

$$M(x;y) \in d \cap d' \iff \begin{cases} y = -5x + 2 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \overset{\text{substitution}}{\iff} \begin{cases} y = -5x + 2 \\ -5x + 2 = 3x - 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -5x + 2 \\ -5x - 3x = -2 - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -5x + 2 \\ -8x = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{4}{-8} = \frac{1}{2} \\ y = -5 \times \frac{1}{2} + 2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$-\frac{5}{2} + \frac{4}{2}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right\}}$$

Donc les droites $\boxed{d \text{ et } d' \text{ se coupent en le point } M\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)}$