« La mathématique universelle est une logique de l'imagination. » Gottfried Leibniz

Chapitre IX — Primitives et équations différentielles

I – Primitives

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On appelle ***primitive de f*** sur I, toute fonction F définie sur I telle que : $\begin{cases} 1) \text{ F est dérivable sur I.} \\ et \\ 2) \ \forall x \in I, F'(x) = f(x). \end{cases}$

Exemple : Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2$; $g(x) = e^x$; $h(x) = e^{-2x}$; $i(x) = x^2$.

→ Par ex : F est définie sur $\mathbb{R}$, par : $F(x) = 2x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Mais aussi : $\tilde{F}(x) = 2x + 1$.

→ $G(x) = e^x$ ou $\tilde{G}(x) = e^x + 2024$

→ $H(x) = \frac{-1}{2} e^{-2x}$

→ $I(x) = \frac{x^3}{3}$

Exercice I

F est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (2x-5)e^{-x}$.

Vérifier que F est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-2x+7)e^{-x}$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit et composée de f° dérivables sur $\mathbb{R}$.

$F(x) = (2x-5)e^{-x} = u(x) \times v(x)$ où $\begin{cases} u(x) = 2x-5 \\ u'(x) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^{-x} \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$F'(x) = u'v + uv' = 2e^{-x} + (2x-5)\times(-e^{-x})$

$F'(x) = e^{-x}(2 + (2x-5)\times(-1))$

$F'(x) = e^{-x}(2-2x+5) = (-2x+7)e^{-x} = f(x)$

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et F une primitive de f sur I. $F' = f$

L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions définies sur I, de la forme :
$G(x)$ = $F(x) + k$..., où k est un réel quelconque.

Remarque : on retiendra donc que les primitives d'une même fonction donnée ne diffèrent que d'une ....constante............
Et que si une fonction admet une primitive sur un intervalle, alors..elle en admet une infinité.!

Preuve : Soit F une primitive de f sur I.

Notons : $P(f)$ l'ensemble de toutes les primitives de f sur I et $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} G : I \to \mathbb{R} \\ \quad x \to G(x) = F(x) + k \text{ où } k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$.

Montrons que $P(f) = \Omega$.

Rappel **: Soient A et B deux ensembles. Dire que $A = B$ équivaut à : $A \subset B$ et $B \subset A$.**

Montrons déjà que $\Omega \subset P(f)$:
Soit $G \in \Omega$: il existe un réel k tel que $\forall x \in I$, $G(x) = F(x) + k$.
G est dérivable sur I car F l'est et k est une constante.
$\forall x \in I$, $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ car F est une primitive de f sur I et donc $F' = f$!
Par suite G est bien une primitive de f sur I, donc $G \in P(f)$: on a donc établi que $\Omega \subset P(f)$.

Réciproquement : montrons que $P(f) \subset \Omega$:
Soit $H \in P(f)$: H est donc dérivable sur I, et $\forall x \in I$, $H'(x) = f(x)$.
Or F est une primitive de f sur I, donc F est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Par suite, la fonction $F - H$ définie sur I est dérivable sur I et :
$\forall x \in I$, $(F - H)'(x) = F'(x) - H'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Par suite $F - H$ est constante sur l'intervalle I : il existe donc un réel k tel que pour tout x appartenant à I, on ait : $F(x) - H(x) = k$, et donc, $H(x) = F(x) - k$.
Donc $H \in \Omega$, et par suite on a établi que $P(f) \subset \Omega$.
Ainsi par double inclusion, on a établi que $P(f) = \Omega$.

Propriété

Soit f une fonction admettant des primitives sur I.
Pour tout réel $x_0 \in I$ et pour tout réel y_0, il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Preuve :

Soit F une primitive de f sur I.
Soit G la fonction définie sur I par : $\forall x \in I$, $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$ (G est une primitive de f sur I).
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
$G(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - F(x_0)$.
Donc la fonction G définie sur I par : $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ est l'unique primitive de f telle que $G(x_0) = y_0$.

Remarque : cette propriété, vous l'utilisez souvent en Physique, avec la donnée d'une condition initiale !

Exercice 2

Démontrer que la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien, puis déterminer la primitive G de la fonction $\ln$ telle que : $G(1) = 2$.

F est définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = x\ln(x) - x$

- F est dérivable sur $]0;+\infty[$ car produit et somme de f° dérivables sur $]0;+\infty[$.
- $\forall x \in I$, $F'(x) = 1\ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1$

$$F'(x) = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$

Donc F est une primitive de $\ln$ sur $]0;+\infty[$.

G est une primitive de $\ln$, dc il existe un réel tq :

$\forall x \in I$, $G(x) = F(x) + k$

$$G(x) = x\ln(x) - x + k$$

Or $G(1) = 2$

Donc on a : $1 \times \ln(1) - 1 + k = 2$

$$k = 2 + 1 = 3$$

Donc $G(x) = x\ln(x) - x + 3$

Voici une compilation d'exercices sous forme de QCM tombés récemment au baccalauréat.

Exercice 3

1.

La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ admet pour primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction :

a. $x \longmapsto \ln(x)$ **b.** $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ **c.** $x \longmapsto x\ln(x) - x$ **d.** $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

2.

Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $K(x) = H(2x)$	**b.** $K(x) = 2H(2x)$	**c.** $K(x) = \dfrac{1}{2}H(2x)$	**d.** $K(x) = 2H(x)$

3.

Parmi les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\mathrm{e}^{-x^2} + 2$:

a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$;

b. toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$;

c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$;

d. toutes sont croissantes sur $]-\infty\,;\,0]$ et décroissantes sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3\mathrm{e}^{-x^2}$$

Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$,

a. $F(x) = -\dfrac{1}{6}\left(x^3+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$

b. $F(x) = -\dfrac{1}{4}x^4\mathrm{e}^{-x^2}$

c. $F(x) = -\dfrac{1}{2}\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$

d. $F(x) = x^2\left(3-2x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$

5.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$.

La seule primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f telle que $F(0) = 1$ est la fonction :

a. $x \longmapsto 2\mathrm{e}^{2x+1} - 2\mathrm{e} + 1$

b. $x \longmapsto 2\mathrm{e}^{2x+1} - \mathrm{e}$

c. $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e} + 1$

d. $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2+x}$

6.

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2\ln x$.
Une primitive F de f sur $]0\,;\,+\infty[$ est définie par :

a. $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3\left(\ln x - \dfrac{1}{3}\right)$;

b. $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3(\ln x - 1)$;

c. $F(x) = \dfrac{1}{3}x^2$;

d. $F(x) = \dfrac{1}{3}x^2(\ln x - 1)$.

2) pour la a : $K'(x) = 2H'(2x)$

$k(x) = 2h(2x)$

pour la b : $K'(x) = 2 \times 2H'(2x)$

$k(x) = 2h(2x)$

3) $f(x) = 3e^{-x^1} + 2$ F : une primitive de f

$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x) = \underbrace{3e^{-x^1} + 2}_{>0}$

Donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

4) $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2} = -\frac{1}{2}u(x) \times v(x)$ où $\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^{-x^2} \\ v'(x) = -2xe^{-x^2} \end{cases}$

Donc $F'(x) = \frac{1}{2}(u'v + uv')$

$F'(x) = -\frac{1}{2}(2xe^{-x^2} + (x^2+1)\times(-2x)e^{-x^2})$

$F'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(2x + (x^2+1)\times(-2x))$

$F'(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2}(2x - 2x^3 - 2x)$

$F'(x) = x^3 e^{-x^2} = f(x)$

Réponse c

6) $F(x) = \frac{1}{3}x^3(\ln(x) - 1)$

$F'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2(\ln(x)-1) + x^3 \times \frac{1}{x}$

$F'(x) = \frac{1}{3}(3x^2\ln(x) - 3x^2 + x^2)$

$F'(x) = \frac{1}{3}(3x^2\ln(x) - 2x^2)$ Pas b !

Comment calculer des primitives de fonctions ?

Par lecture en sens inverse du tableau donnant les fonctions dérivées, on obtient le tableau suivant qui permet de trouver les primitives des fonctions de référence.

Ce tableau est à connaitre par cœur sans la moindre hésitation :

♥♥♥

Primitives des fonctions de référence

f est définie par $f(x)$ =	Les primitives de f sur I sont définies par $F(x)$ =	Sur l'intervalle I =
$f(x) = a$, où $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$ où $x \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $n < -1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(\lvert x \rvert) + k$ si $x > 0$, $F(x) = \ln(x) + k$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{-1}{x} + k$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$]0 ; +\infty[= \mathbb{R}^*_+$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^{ax}$ où $a \in \mathbb{R}^*$	$F(x) = \frac{e^{ax}}{a} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$ où $a \neq 0$	$F(x) = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$ où $a \neq 0$	$F(x) = \frac{\sin(ax+b)}{a} + k$	$\mathbb{R}$

♥♥♥

$(\sin)' = \cos$ et $(\cos)' = -\sin$

<u>Propriété (très utilisée en pratique)</u>

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, admettant respectivement les fonctions F et G comme primitives sur I.

<u>Alors</u> : (1) La fonction $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
(2) Pour tout réel α, la fonction αF est une primitive de αf sur I.

<u>Preuve</u> :

(1) $F + G$ est dérivable sur I, et $\forall x \in I$, $(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x)$
$= f(x) + g(x)$

Donc $F + G$ est une primitive de $f + g$.

(2) résulte de $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$

Exercice 4

En utilisant le résultat de l'exercice 2 page 2, déterminer une primitive de la fonction logarithme décimal (*log*).

Rappel : $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln sur $]0 ; +\infty[$.

Pour $x > 0$, $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \iff \ln(x) = \ln(10) \times \log(x)$

Donc F est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{1}{\ln(10)} \times (x\ln(x) - x)$$

point ,

$$F(x) = \frac{x\ln(x) - x}{\ln(10)} = \frac{x\ln(x)}{\ln(10)} - \frac{x}{\ln(10)}$$

$$F(x) = x\log(x) - \frac{x}{\ln(10)} = x\log(x) - x\log(e)$$

$$= x(\log(x) - \log(e))$$

$$= x\log\left(\frac{x}{e}\right)$$

Remarque importante

En règle générale, il n'y a pas de relation permettant de trouver des primitives un produit ou un quotient.

En particulier, une primitive de *fg* n'est pas égale au produit d'une primitive de *f* par une primitive de *g*, tout comme une primitive de $\frac{f}{g}$ n'est pas une primitive de *f* divisée par une primitive de *g*.

Contre-exemples :

Pour le produit : $f(x) = 4$; $g(x) = 2x$ donc $f(x) \times g(x) = 6x$ et $x \mapsto 4x^3$ a pr dérivée
$F(x) = 4x$; $G(x) = x^2$ donc $F(x) \times G(x) = 4x^3$ $x \mapsto 12x^2$ qui n'est pas $f(x) \times g(x) = 6x$!

Pour le quotient :

$f(x) = 1$ $F(x) = x$
$g(x) = x$ $G(x) = \frac{x^2}{2}$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$ qui a pr primitive : $x \mapsto \ln(x)$

et $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$. Donc $\frac{F}{G}$ n'est pas primitive de $\frac{f}{g}$.

Remarque XXL

Dans les exercices, on peut, si on n'est pas sûr de sa réponse, contrôler cette dernière : si on vous demande de trouver une primitive F d'une fonction f donnée par l'énoncé, en dérivant le candidat obtenu F, vous devez obtenir la fonction f donnée par l'énoncé !!!

***Exercice 5** (tout en délicatesse)*

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur le plus grand intervalle possible que l'on précisera :

a) $f(x) = 2x^4$; b) $g(x) = x^2 + \frac{3}{5}x + 3$; c) $h(x) = \frac{-1}{4}x^3 + 5x^2 - 4x + 1$; d) $l(x) = 4e^{-2x} + x^3 + \frac{3}{4\sqrt{x}}$

e) $m(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^4} + e^{5x}$ f) $n(x) = 3cos(x) + sin(4x)$ g); $p(x) = -3(2x + e^x)$;h) $q(x) = \frac{2}{x^2} + 2024.$

---

a) $f(x) = 2x^4$ avec $x \in \mathbb{R}$

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$F(x) = \frac{2x^5}{5}$

b) $g(x) = x^2 + \frac{3}{5}x + 3$ avec $x \in \mathbb{R}$

Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$:

$G(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{x^2}{2} + 3x + 2024$

c) $h(x) = \frac{-1}{4}x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ avec $x \in \mathbb{R}$

Soit H une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

$H(x) = \frac{-1}{4} \times \frac{x^4}{4} + 5 \times \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x + 3$

$H(x) = \frac{-x^4}{16} + \frac{5x^3}{3} - 2x^2 + x + 3.$

d) $l(x) = 4e^{-2x} + x^3 + \frac{3}{4\sqrt{x}}$ avec $x \in]0; +\infty[$

Soit L une primitive de l sur $]0; +\infty[$.

$L(x) = 4 \times \frac{e^{-2x}}{-2} + \frac{x^4}{4} + \frac{3}{4} \times 2\sqrt{x}$

$L(x) = -2e^{-2x} + \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$

e) $m(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^4} + e^{5x}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$

Soit M une primitive de m sur $\mathbb{R}^*$:

$m(x) = \frac{1}{x} - 3x^{-4} + e^{5x}$

Donc $M(x) = \ln(|x|) - 3 \times \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + \frac{e^{5x}}{5} + \pi$

constante

$M(x) = \ln(|x|) + \frac{1}{x^3} + \frac{e^{5x}}{5} + \pi$

f) $n(x) = 3\cos(x) + \sin(4x)$ avec $x \in \mathbb{R}$

Soit N une primitive de n sur $\mathbb{R}$:

$N(x) = 3\sin(x) - \frac{\cos(4x)}{4}$

g) $p(x) = -3(2x + e^{x})$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Soit P une primitive de p sur $\mathbb{R}$:

$P(x) = -3(x^2 + e^{x})$

h) $q(x) = \frac{2}{x^2} + 2024$ avec $x \in \mathbb{R}^*$

Donc $Q(x) = 2 \times \left(\frac{-1}{x}\right) + 2024x = \frac{-2}{x} + 2024x$

Exercice 6

Un objet est lâché de 20 mètres de hauteur dans le vide, sans vitesse initiale.
Son accélération est constante et égale à 9,81 $N.m^{-2}$.

a) Déterminer la vitesse instantanée de cet objet à un instant *t* avant qu'il ne rencontre le sol.
b) Déterminer la loi horaire de l'objet.
c) Quelle sera la durée de chute de cet objet (arrondir à 0,1 seconde près).

$a(t)$ = accéléra°
Ici $a(t) = 9{,}81$

$v(t)$ = vitesse instantanée

$a(t) = v'(t)$ et $v(t) = d'(t)$ avec $d(t)$ = distance parcourue par l'objet à l'instant t.

Ici : $a(t) = 9{,}81 = v'(t)$

Donc $v(t) = 9{,}81t + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Or condi° initiale : $v(0) = 0$ donc $0 = 9{,}81 \times 0 + \lambda$, $\lambda = 0$.

Ainsi $v(t) = 9{,}81t$

Or $v(t) = d'(t) = 9{,}81t$

Donc $d(t) = \frac{9{,}81t^2}{2} + \mu$

$d(t) = 4{,}905t^2 + \mu$

Or $d(0) = 0$ donc $\mu = 0$ et $d(t) = 4{,}905t^2$

c) Résolvons : $d(t) = 20 \Leftrightarrow 4{,}905t^2 = 20 \Leftrightarrow t^2 = \frac{20}{4{,}905} \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t = \sqrt{\frac{20}{4{,}905}}$

Donc $t \approx 2s$

Primitives de fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

♥♥

f est définie par $f=$	Les primitives de f sur I sont définies par F	Condition sur u
♥ $u'u^n$ où $n\in\mathbb{N}^*$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+k$ où $k\in\mathbb{R}$	$\emptyset$
♥ $\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+k$ où $k\in\mathbb{R}$	u ne s'annule pas sur I.
$\frac{u'}{u^n}$ $n\neq 1$	$\frac{u^{-n+1}}{-n+1}+k$ où $k\in\mathbb{R}$	u ne s'annule pas sur I.
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+k$, où $k\in\mathbb{R}$	u est à valeurs strict. positives sur I.
♥ $\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)+k$ où $k\in\mathbb{R}$	u ne s'annule pas sur I.
♥ $u'e^u$	e^u+k où $k\in\mathbb{R}$	$\emptyset$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)+k$, où $k\in\mathbb{R}$	$\emptyset$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)+k$, où $k\in\mathbb{R}$	$\emptyset$

♥♥

Exercice 7

Trouver la bonne réponse pour chacune des deux questions suivantes :

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{x^2}$.

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0)=1$ est définie par :

a. $F(x)=\frac{x^2}{2}e^{x^2}$;

b. $F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}$

c. $F(x)=\left(1+2x^2\right)e^{x^2}$;

d. $F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}+\frac{1}{2}$

2.

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;\,1[$ par

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2}$$

Une primitive de la fonction f est la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$ par :

a. $g(x)=-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$

b. $g(x)=\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$

c. $g(x)=\frac{x^2}{2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)}$

d. $g(x)=\frac{x^2}{2}\ln\left(1-x^2\right)$

1) $f(x) = xe^{x^2}$ Je pose $u(x) = x^2$

$u'(x) = 2x$ donc $x = \frac{u'(x)}{2}$

$f(x) = xe^{u(x)}$

$f(x) = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$

↳ motif de cours

Donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} + k = \frac{1}{2}e^{x^2} + k$

$F(0) = 1 \iff \frac{1}{2}e^0 + k = 1$

$k = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

et $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}$. Réponse d.

2) $x \in]-1;1[$ et $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

Je pose $u(x) = 1-x^2$

$u'(x) = -2x$

Donc $f(x) = \frac{x}{1-x^2} = \frac{-\frac{1}{2} \times (-2x)}{u(x)} = -\frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

Donc, $g(x) = -\frac{1}{2} \times \ln(|u(x)|)$

$g(x) = -\frac{1}{2}\ln(|1-x^2|)$

$g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ car $x \in]-1;1[$ donc $1-x^2 > 0$. Réponse a.

Exercice 8 (*C'est reparti pour un moment de délicatesse*).

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, sans se préoccuper de l'intervalle sur lequel elle y est définie :

$f(x) = 2x(x^2+1)^3$; $g(x) = \frac{4x}{x^2+1}$; $h(x) = -2xe^{-x^2}$; $i(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; $j(x) = \frac{5}{\sqrt{2x+1}}$

$k(x) = sin(x) + 3cos(2x)$; $l(x) = e^{-x} - 2e^{\frac{x}{5}}$; $m(x) = e^{2x} + 1 + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$.

$n(x) = \frac{\ln(x)}{x}$; $p(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$; $q(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+1}}$; $r(x) = \frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}$

$s(x) = \frac{3x-5}{x+5}$ où $x > -5$.

On commencera par établir que pour tout réel $x > -5$: $s(x) = a + \frac{b}{x+5}$ où a et b sont deux réels que l'on déterminera.

$t(x) = x^2(\frac{x^3}{3}+1)$; $\beta(x) = e^{-x}sin(e^{-x})$; $\gamma(x) = x^2cos(x^3)$

→ $f(x) = 2x\ (x^2+1)^3$ Je pose $u(x) = x^2+1$
$u'(x) = 2x$

Donc $f(x) = u'(x) \times (u(x))^3$

Soit F une primitive de f :

$F(x) = \frac{(u(x))^{3+1}}{3+1} = \frac{(x^2+1)^4}{4}$

→ $g(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ Posons $u(x) = x^2+1$
$u'(x) = 2x$

Donc $g(x) = \frac{2u'(x)}{u(x)} = 2 \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

Donc $G(x) = 2\ln(|x^2+1|)$

$G(x) = 2\ln(x^2+1)$

→ $h(x) = -2xe^{-x^2}$ Je pose $u(x) = -x^2$
$u'(x) = -2x$

Donc $h(x) = u'(x)e^{u(x)}$

Donc $H(x) = e^{u(x)} = e^{-x^2}$

→ $i(x) = \frac{1}{x^2}\ e^{\frac{1}{x}}$ Je pose $u(x) = \frac{1}{x}$
$u'(x) = \frac{-1}{x^2}$

Donc $i(x) = -u'(x)e^{u(x)}$

Donc $I(x) = -e^{u(x)} = -e^{\frac{1}{x}}$

→ $j(x) = \frac{5}{\sqrt{2x+1}}$ Je pose $u(x) = 2x+1$
$u'(x) = 2$

$j(x) = \frac{5}{\sqrt{u(x)}} = \frac{2 \times \frac{5}{2}}{\sqrt{u(x)}}$

$j(x) = \frac{5}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

Donc $J(x) = \frac{5}{2} \times 2\sqrt{u(x)}$

$J(x) = 5\sqrt{2x+1}$

→ $k(x) = \sin(x) + 3\cos(2x)$

$K(x) = -\cos(x) + \frac{3}{2}\sin(2x)$

→ $l(x) = e^{-x} - 2e^{\frac{x}{5}}$

$L(x) = -e^{-x} - 2 \times \frac{e^{\frac{x}{5}}}{\frac{1}{5}} = -e^{-x} - 10\,e^{\frac{x}{5}}$

→ $n(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} \times \ln(x)$

$n(x) = u'(x) \times u(x)$

Donc $N(x) = \frac{(u(x))^2}{2} = \frac{(\ln(x))^2}{2}$.

→ $p(x) = \frac{1}{x\ln(x)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln(x)}$

Posons $u(x) = \ln(x)$
$u'(x) = \frac{1}{x}$

Donc $p(x) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)}$
$p(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Donc $P(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|\ln(x)|)$

→ $r(x) = \frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}$ Posons $u(x) = e^{4x}+1$
$u'(x) = 4e^{4x}$

Donc $r(x) = \frac{1}{4} \times \frac{4e^{4x}}{e^{4x}+1} = \frac{1}{4}\,\frac{u'(x)}{u(x)}$

Donc $R(x) = \frac{1}{4}\ln(|u(x)|) = \frac{1}{4}\ln(e^{4x}+1)$

→ $m(x) = e^{2x} + 1 + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$

Soit M une primitive de m : $M(x) = \frac{e^{2x}}{2} + x + \ln(|x^2+1|) + \ln(|x+1|) - \frac{1}{x+1}$
inutile car $x^2+1>0$

car $\theta(x) = x+1$
$\theta'(x) = 1$

$\frac{\theta'(x)}{\theta^2(x)}$ qui se primitive en $\frac{-1}{\theta(x)}$.

$q(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+1}}$ Posons $u(x) = x^2+3x+1$

$u'(x) = 2x+3$

Donc $q(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

Donc $Q(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x^2+3x+1}$

→ $s(x) = \frac{3x-5}{x+5}$ où $x > -5$.

$$a + \frac{b}{x+5} = \frac{a(x+5)}{x+5} + \frac{b}{x+5} = \frac{ax+5a+b}{x+5}$$

Ainsi : $a + \frac{b}{x+5} = s(x) \iff \forall x \in]-5;+\infty[,\ \frac{ax+5a+b}{x+5} = \frac{3x-5}{x+5}$.

$\iff \forall x \in]-5;+\infty[,\ ax+5a+b = 3x-5$.

Par identifica° : $\begin{cases} a = 3 \\ 5a+b = -5 \end{cases}$

$\begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \times 5 \times 3 = -20 \end{cases}$

Ainsi, $s(x) = 3 + \frac{-20}{x+5}$

Méthode bis : $s(x) = \frac{3x-5}{x+5} = \frac{3x+15-20}{x+5}$

$s(x) = \frac{3x+15}{x+5} - \frac{20}{x+5}$

$s(x) = 3 - \frac{20}{x+5}$.

Donc $S(x) = 3x - 20\ln(x+5)$

→ $t(x) = x^2\left(\frac{x^3}{3}+1\right)$ Je pose $u(x) = \frac{x^3}{3}+1$

$u'(x) = x^2$

Donc $t(x) = u'(x)u(x)$

Donc $T(x) = \frac{u^2(x)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+1\right)^2$

→ $\beta(x) = e^{-x}\sin(e^{x})$ Posons $u(x) = e^{-x}$

$u'(x) = -e^{-x}$

Donc $\beta(x) = -(-e^{-x})\sin(e^{-x}) = -u'(x)\sin(u(x))$

Donc $B(x) = \cos(u(x)) = \cos(e^{-x})$.

→ $\gamma(x) = x^2\cos(x^3)$

$\gamma(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2\cos(x^3)$

$\gamma(x) = \frac{1}{3}u'(x)\cos(u(x))$

Donc $\Gamma(x) = \frac{1}{3}\sin(u(x))$

$= \frac{1}{3}\sin(x^3)$

D'autres techniques de calcul de primitive existent et seront vues dans le chapitre calcul intégral, mais il faut ***bien être conscient, qu'arriver à déterminer des primitives*** d'une fonction donnée ***est un luxe***, et que bien souvent, ***on ne sait pas*** exprimer à l'aide des fonctions usuelles des primitives de fonctions simples, comme par-exemple : $f(x) = e^{-x^2}$.

Calculer des primitives devient vite addictif. En calculer une centaine, en guise de loisir, permet, entre autres, de devenir rapide. Il y en a plein dans votre livre. Au travail !

Exercice 9

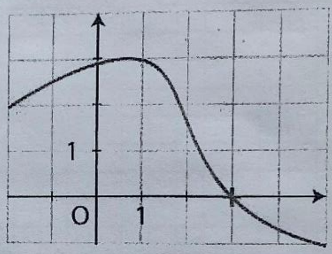
f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et F une primitive de f. On suppose que F ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(-x) + f(3x+1) + \dfrac{f(x)}{F(x)}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(-x) + f(3x+1) + \dfrac{f(x)}{F(x)}$

$G(x) = -F(-x) + \dfrac{F(3x+1)}{3} + \ln(|F(x)|)$

Exercice 10

f est la fonction définie sur $[-2\,;5]$ par la courbe tracée dans ce repère.
Déterminer le sens de variation d'une primitive de f sur l'intervalle $[-2\,;5]$.



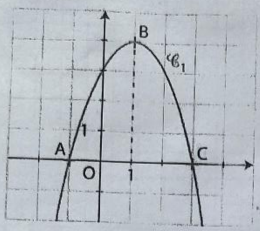
$\forall x \in [-2\,;5]$, $F'(x) = f(x)$

On lit graphiqt le signe de $f(x)$:

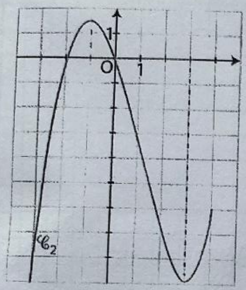
x	-2		3		5
$f(x) = F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

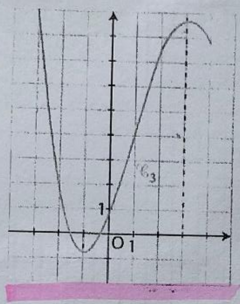
Exercice 11

f est une fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$.
Les points $A(-1\,;0)$, $B(1\,;4)$ et $C(3\,;0)$ appartiennent à la courbe représentative de *f* donnée ci-contre.



Parmi les deux courbes suivantes, laquelle est la représentation graphique d'une primitive de la fonction *f* ?





x	-3		-1		3		4
$g(x) = f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

II – Equations différentielles

A– Généralités

Définition

Une équation différentielle est une équation faisant intervenir une fonction *f* dérivable ainsi que sa dérivée (ou ses dérivées successives).

Remarque : le terme différentiel indique la présence de dérivées.

Exemples

Voici quelques équations différentielles :

$f'(x) + 2f(x) = 0$; $f'(x) + f(x) = 5$; $f''(x) + 2f'(x) - f(x) = 3e^x$

$\hookrightarrow y'' + 2y - y = 3e^x$

ou encore : $f'(x) = 4f(x)$; $f'(x) = -2f(x) + x$.

En règle générale, en mathématiques, on note *y* la fonction inconnue, sans faire figurer la variable *x*.

Ainsi, l'équation différentielle : $f'(x) + 2f(x) = 0$ s'écrira aussi : $y' + 2y = 0$.

Ecrire avec la nouvelle notation la seconde équation différentielle citée plus haut : $y' + y = 5$

Remarque

En physique, on noterait plutôt au lieu de $f'(x) + 2f(x) = 0$: $\dfrac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 0$.

De même, au lieu de : $y'' + 5y' + 2y = 0$, on noterait : $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} + 5\dfrac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 0$.

Le terme $\dfrac{df(x)}{dx}$ signifiant $f'(x)$ et $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ signifiant $f''(x)$.

Notons qu'historiquement, on notait ainsi la dérivée.

En mécanique, la dérivée d'une fonction f est encore notée : $\dot{f}$, la dérivée seconde de f est notée : $\ddot{f}$ non

En classe de terminale, on va s'intéresser à deux types d'équations différentielles seulement :

- L'équation différentielle : $y' = ay$ où a est un réel donné.
- L'équation différentielle : $y' = ay + b$, où a et b sont deux réels donnés.

Ces équations sont appelées ***équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.***

Définition

Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I, c'est déterminer ***toutes les fonctions dérivables sur I*** qui vérifient l'équation différentielle de départ.

Par exemple, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' = 2y$, c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x, on ait : $f'(x) = 2f(x)$.

Attention, quand on vous demande de résoudre une équation différentielle, on ne vous demande pas de trouver une valeur de x, mais une fonction f !!!

Exemple

a) Résoudre sur $]0 ; +\infty[$ l'équation différentielle : $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = x$.

c) Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2}$ est solution de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 0$. $\Rightarrow$ q° basique BAC

d) Vérifier également que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \cos(x) + \sin(x)$ est solution de : $y' + y = 2\cos(x)$.

a) $x > 0$ et $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Les sol° de (E) sont les f° f définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} + k,\ k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

b) $g'(x) = x$ (F)

(F) a pr sol° tte f° définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

$$f = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^2}{2} + k \, ; \, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

c) $y' + 2xy = 0$

$f(x) = e^{-x^2}$

*) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de f° dérivables sur $\mathbb{R}$.

**) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 2xf(x) = -2xe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} = 0$

Donc f est sol° sur $\mathbb{R}$ de $y' + 2xy = 0$

d) $y' + y = 2\cos(x)$ (E)

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \cos(x) + \sin(x)$

But : Mq g est sol° de (E) sur $\mathbb{R}$.

1) g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) + g(x) = 2\cos(x)$.

1) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de 2 f° dérivables sur $\mathbb{R}$.

Et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\sin(x) + \cos(x)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) + g(x) = -\cancel{\sin}(x) + \cos(x) + \cos(x) + \cancel{\sin}(x) = 2\cos(x)$

Donc g est sol° sur $\mathbb{R}$ de : $y' + y = 2\cos(x)$.

B – Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un réel donné.

Notons (E) l'équation différentielle : $y' = ay$.

Théorème XL ♥

Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation (E) : $y' = ay$ sont exactement les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = .ke^{ax}... \text{ où est } k \text{ un réel quelconque.}$$

Concrètement, les solutions de (E) sont les *"multiples réels"* de la fonction : $x \to ..e^{ax}$

Preuve :

Notons $\mathcal{S}_{(E)}$ l'ensemble des solutions de (E).

Soit $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{ax} \text{ où } k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$.

On doit établir que $\mathcal{S}_{(E)} = \Omega$.

On procède par double inclusion :

Première inclusion : Mq $\Omega \subset \mathcal{S}(E)$:

Soit f une f° appartenant à Ω.

Par déf° de Ω, il existe $k \in \mathbb{R}$ tq :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ke^{ax}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée) et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = k \times ae^{ax}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a \times ke^{ax}$

$f'(x) = a \times f(x)$

Ainsi f est sol° de (E) : $y' = ay$

Donc $\Omega \subset \mathcal{S}(E)$.

Deuxième inclusion : Mq $\mathcal{S}(E) \subset \Omega$:

Soit f une f° appartenant à $\mathcal{S}(E)$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = af(x)$

Définissons la f° g sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = f(x) \times e^{-ax}$; Prouvons que g est constante sur $\mathbb{R}$.

*) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit de f° dérivables sur $\mathbb{R}$.

**) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) \times e^{-ax} + f(x) \times (-ae^{-ax})$

$g'(x) = f'(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax}$

$g'(x) = af(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = 0$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$: $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = k$

$f(x)e^{-ax} = k$

Donc $f(x) = \dfrac{k}{e^{-ax}} = ke^{ax}$

Donc $f \in \Omega$ et $S(E) \subset \Omega$.

Conclusion : $S(E) = \Omega$.

Exercice 12

a) Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' = 2y$.

b1) Résoudre l'équation différentielle : $2y'+3y = 0$.

b2) Déterminer la fonction f solution de la précédente équation différentielle telle que $f(2) = 1$. → condi° initiale

c) Déterminer la solution f définie sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle : $y' + \dfrac{1}{4}y = 0$ et $f(3) = -1$.

a) $y' = 2y$

On reconnait une E.D. de la forme : $y' = ay$ avec $a = 2$.

D'après le cours, les sol° de cette ED st les f° définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ke^{2x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

$$S(E) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{2x} \, ; \, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

b1) $2y' + 3y = 0$ (ceci n'est pas de la forme $y' = ay$!)

$2y' = -3y$

$y' = -\frac{3}{2}y$

Donc les sol° st les f° f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}$; $k \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto k e^{-\frac{3}{2}x} \ ; \ k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

b2) f est sol° de (E) donc : $f(x) = k e^{-\frac{3}{2}x}$

$f(2) = 1 \iff k e^{-\frac{3}{2} \times 2} = 1 \iff k e^{-3} = 1 \iff k = \frac{1}{e^{-3}} = e^{3}.$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = e^{3} \times e^{-\frac{3}{2}x} = e^{-\frac{3}{2}x + 3}.$

c) $y' + \frac{1}{4} y = 0$

$y' = -\frac{1}{4} y$: de la forme $y' = ay$ avec $a = -\frac{1}{4}$.

D'après le cours, les sol° de cette équa° sont les f° f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = k e^{-\frac{1}{4}x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

$f(3) = -1 \iff k e^{-\frac{1}{4} \times 3} = 1 \iff k = \frac{-1}{e^{-\frac{3}{4}}} = -e^{\frac{3}{4}}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -e^{\frac{3}{4}} \times e^{-\frac{1}{4}x}$

$f(x) = -e^{-\frac{1}{4}(x-3)}$.

Pour pouvoir appliquer le théorème *XL*, il faut que l'équation différentielle soit écrite sous la forme : $y' = ay$ (on dit qu'elle est écrite sous forme résolue).

Si on a une équation différentielle de la forme : $ay' + by = 0$, où a est un réel non nul et b est un réel quelconque, on ***commencera toujours par écrire l'équation différentielle sous forme résolue*** : nécessité d'isoler y' avant d'appliquer le théorème *XL* !

Le théorème *XL*, nous permet-il de résoudre l'équation différentielle $x^2y' + 3y = 0$? Pourquoi ?

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto k e^{-\frac{3}{2}x} \ ; k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

b2) f est sol° de (E) donc : $f(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}$

$f(2) = 1 \iff ke^{-\frac{3}{2}\times 2} = 1 \iff ke^{-3} = 1 \iff k = \frac{1}{e^{-3}} = e^3.$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = e^3 \times e^{-\frac{3}{2}x} = e^{-\frac{3}{2}x+3}.$

c) $y' + \frac{1}{4}y = 0$

$y' = -\frac{1}{4}y$: de la forme $y' = ay$ avec $a = -\frac{1}{4}$.

D'après le cours, les sol° de cette équa° sont les f° f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ke^{-\frac{1}{4}x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

$f(3) = -1 \iff ke^{-\frac{1}{4}\times 3} = 1 \iff k = \frac{-1}{e^{-\frac{3}{4}}} = -e^{\frac{3}{4}}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -e^{\frac{3}{4}} \times e^{-\frac{1}{4}x}$

$f(x) = -e^{-\frac{1}{4}(x-3)}$.

Pour pouvoir appliquer le théorème *XL*, il faut que l'équation différentielle soit écrite sous la forme : $y' = ay$ (on dit qu'elle est écrite sous forme résolue).

Si on a une équation différentielle de la forme : $ay' + by = 0$, où a est un réel non nul et b est un réel quelconque, on ***commencera toujours par écrire l'équation différentielle sous forme résolue*** : nécessité d'isoler y' avant d'appliquer le théorème *XL* !

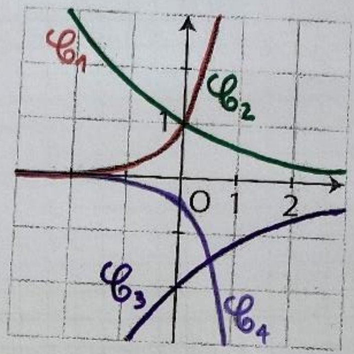
Le théorème *XL*, nous permet-il de résoudre l'équation différentielle $x^2y' + 3y = 0$? Pourquoi ?

Non, b pas réel.

Exercice 13

68 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{-4x}$.
Déterminer l'équation différentielle de la forme $y' = ay$ dont f est une solution sur $\mathbb{R}$.

69 Dans ce repère, les courbes représentent des solutions d'équations différentielles du type $y' = ay$.
Associer chacune de ces courbes à l'équation différentielle $(\mathbf{E_1}) : y' = 2y$ ou $(\mathbf{E_2}) : y' + 0{,}5y = 0$.



68 : $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ a pr sol° : f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{ax}$.

Ici, $f(x) = 5e^{-4x}$ est sol° de $y' = ay$ donc $\begin{cases} a = -4 \\ k = 5 \end{cases}$

f est sol° sur $\mathbb{R}$ de : $y' = -4y$.

69 : $(E_1) : y' = 2y$

$S(E_1) = \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{2x} \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$

$(E_2) : y' + 0{,}5y = 0 \iff y' = -0{,}5y$

$S(E_2) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{-0{,}5x} \end{array} ; k \in \mathbb{R} \right\}$

$k = 1$ car $\mathcal{C}_1$ passe par $A(0;1)$:
Grâce à $\mathcal{C}_1$: la f° f associée à cette courbe vérifie : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$.

Or seule $\lim\limits_{x \to +\infty} ke^{-0{,}5x} = 0$ tandis que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$.

Donc $\mathcal{C}_1$ est associée à f_1 sol° de (E_2).

Idem pour $\mathcal{C}_3$ (ici $k = -2$).

Enfin $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$ sont associées à des f° f_2 et f_4 sol° de (E_1) car

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x) = -\infty$.

Propriété

> Soit (E) l'équation différentielle : $y' = ay$ où a est un réel.
> Soit x_0 et y_0 deux réels donnés.
>
> Il existe une ***UNIQUE*** solution de (E) notée f, telle que $f(x_0) = y_0$.

Remarque : la relation : $f(x_0) = y_0$ est appelée la condition initiale.

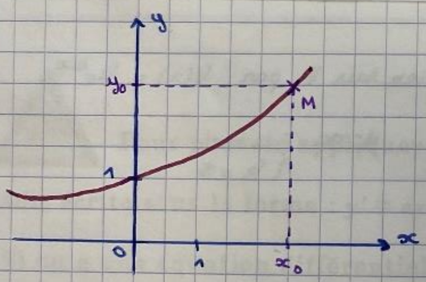
Preuve : $y' = ay$ a pour sol° les fonc° f avec : $f(x) = ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Ainsi $f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow ke^{ax_0} = y_0 \Leftrightarrow k = \dfrac{y_0}{\underbrace{e^{ax_0}}_{\neq 0}} = y_0 e^{-ax_0}$.

Donc : $f(x) = y_0 e^{-ax_0} \times e^{ax}$

$f(x) = y_0 e^{a(x - x_0)}$

Interprétation graphique de la propriété :



pour M donné il passe une seule courbe de f° sol° de : $y' = ay$

C – Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ où a et b sont deux réels donnés avec $a \neq 0$.

Définition

L'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$ (ou encore $y' - ay = b$) est appelée une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.

Théorème XXL : soit a et b deux réels avec $a \neq 0$.

Soit (E) l'équation différentielle : $y' = ay + b$.

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Preuve :

(E) : $y' = ay + b$

Vérifions d'abord que tte f° f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ est sol° de (E) :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée et somme) et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = k \times ae^{ax} - 0$
$f'(x) = ake^{ax}$

et $a f(x) + b = a\left(ke^{ax} - \frac{b}{a}\right) + b = ake^{ax} - \frac{a\cancel{b}}{\cancel{a}} + \cancel{b}$.

Ainsi : $f'(x) = af(x) + b$ donc f sol° de (E).

Réciproquement :

Soit f une sol° de (E). But mq $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

Soit g une autre sol° de (E) :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f'(x) = af(x) + b \\ g'(x) = a g(x) + b \end{cases}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - g'(x) = af(x) + b - (ag(x) + b)$

$f'(x) - g'(x) = af(x) - ag(x)$

$(f-g)'(x) = a(f-g)(x)$

Ainsi : $f-g$ est sol° sur $\mathbb{R}$ de l'éq. diff (G) : $y' = ay$.

Donc $\exists k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f-g)(x) = ke^{ax}$

Donc $f(x) = g(x) + ke^{ax}$.

Enfin cherchons une f° g constante sol° de (E) :

$g(x) = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est sol° de (E) revient à dire que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = ag(x) + b$

$0 = a\alpha + b$

$\alpha = \frac{-b}{a}$ car $a \neq 0$.

Bref $g(x) = \frac{-b}{a}$.

Et par suite, $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

Exemple : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' = 3y + 4$.

Remarque : en pratique, pour résoudre $y' = ay + b$, si vous oubliez la forme générale des solutions, ce qui est tout à fait normal, résolvez d'abord $y' = ay$, puis cherchez une fonction constante solution de $y' = ay + b$, appelée solution particulière de l'équation différentielle.

L'ensemble des solutions de $y' = ay + b$ est la somme des fonctions solutions de $y' = ay$ et de la fonction constante trouvée.
On vous expliquera ça en mathématiques supérieures, c'est la notion d'espaces affines et d'espace vectoriels…
En terminale, vous serez guidés, en particulier dans la recherche d'une solution particulière !

M_1 : (E) est de la forme : $y' = ay + b$ avec $a = 3$ et $b = 4$.

D'après le cours les sol° de (E) st les f° définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ke^{3x} - \frac{4}{3}$ où $k \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{3x} - \frac{4}{3} \end{array} \text{ où } k \in \mathbb{R} \right\}$$

M_2 : $y' = 3y$ a pr sol° : $x \mapsto ke^{3x}$; $k \in \mathbb{R}$.

Ensuite on cherche une sol° constante de (E) : $y' = 3y + 4$.

$f(x) = \lambda$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 = 3\lambda + 4$
$f'(x) = 0$ $\qquad \lambda = \frac{-4}{3}$.

Enfin les sol° de (E) st la somme des sol° de (E_0) : $y' = 3y$ et de la f° constante trouvée :

$$\mathcal{S}(E) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{3x} - \frac{4}{3} \end{array} ; k \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 14

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' + 2y = 1$.

(E) : $y' + 2y = 1$

(E) s'écrit aussi sous la forme résolue : $y' = -2y + 1$.

Cette dernière est de la forme : $y' = ay + b$ avec : $a = -2$ et $b = 1$.

D'après le cours, les sol° de (E) st les f° définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ke^{-2x} - \frac{b}{a}$

$f(x) = ke^{-2x} - \frac{1}{-2}$

$f(x) = ke^{-2x} + \frac{1}{2}$

$S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{-2x} + \frac{1}{2} \end{array} \text{ où } k \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 15

On place une tasse de thé bouillante dans une pièce où la température est constante et égale à 20 °C. Selon la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement de la tasse est proportionnelle à la différence de la température de la tasse et la température de la pièce.
On note $T(t)$ la température (en °C) de la tasse à l'instant t (exprimé en minute).
On suppose que $T(0) = 100$ et, d'après la loi de Newton, il existe une constante réelle k telle que $T'(t) = k(T(t) - 20)$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = k(y - 20)$ et en déduire l'expression de $T(t)$ en fonction de k.
2. Au bout de 14 minutes, la température du thé est égale à 40 °C.
   a. Démontrer que $k = \frac{-\ln(2)}{7}$.
   b. Au bout de combien de temps la température du thé devient-elle inférieure à 25 °C ?

$T(t)$: temp. de la tasse au bout de t minutes.

$T(0) = 100$

$\exists k \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0, T'(t) = k(T(t) - 20)$.

1. $y' = k(y - 20)$ où $k \in \mathbb{R}$

$y' = ky - 20k$ de la forme : $y' = ax + b'$ avec $\left\{ \begin{array}{l} a = k \\ b = -20k \end{array} \right.$

D'après le cours, les sol° de cette E.D. st les f° f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \lambda e^{kx} - \frac{b}{a} = \lambda e^{kx} - \frac{(-20k)}{k}$

$f(x) = \lambda e^{kx} + 20$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{kx} + 20 \end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$x \to t$ et $f \to T$

Donc $T(t) = \lambda e^{kt} + 20$.

Or $T(0) = 100 \Leftrightarrow \lambda e^0 + 20 = 100$
$\Leftrightarrow \lambda = 100 - 20 = 80$

$T(t) = 80 e^{kt} + 20$.

2. a. $T(14) = 40$

Donc : $80e^{14k} + 20 = 40$

$80e^{14k} = 40 - 20 = 20$

$e^{14k} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$

$\ln(e^{14k}) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

$14k = -\ln(4)$

$k = \frac{-\ln(4)}{14} = \frac{-\ln(2)^2}{2 \times 7} = \frac{-2\ln(2)}{2 \times 7}$

$k = \frac{-\ln(2)}{7}$.

Ainsi $T(t) = 80e^{-\frac{\ln(2)}{7}t} + 20$.

b. Résolvons l'inéqua° : $T(t) \leq 25$

$80e^{-\frac{\ln(2)}{7}t} + 20 \leq 25$

$80e^{-\frac{\ln(2)}{7}t} \leq 5$

$e^{-\frac{\ln(2)}{7}t} \leq \frac{5}{80}$

$e^{-\frac{\ln(2)}{7}t} \leq \frac{1}{16}$

$\frac{-\ln(2)}{7}t \leq -\ln(16)$

$\frac{\ln(2)}{7} t \geqslant \ln(16)$ car $-1 < 0$

$t \geqslant \frac{7\ln(16)}{\ln(2)}$

$t \geqslant \frac{7\ln(2^4)}{\ln(2)}$

$t \geqslant 28$

Au bout de 28 minutes la temp de la tasse devient inférieure à 25°C.

Exercice 16

Soit (E) l'équation différentielle : $2y' + 3y = 6x + 1$.

a) Déterminer l'unique fonction affine g solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

b) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $f-g$ est solution de (E') où (E') est l'équation différentielle : $2y' + 3y = 0$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

d) Déterminer l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(4) = 11$.

(E) : $2y' + 3y = 6x + 1$

⚠ (E) n'est ni du type : $y' = ay$, ni de type $y' = ay + b$ où a et b st des constantes.

a) Soit g une f° affine :

$g(x) = mx + p$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = m$.

On veut que g soit sol° de (E) sur $\mathbb{R}$ donc :

$\forall x \in \mathbb{R},\ 2g'(x) + 3g(x) = 6x + 1$

$\forall x \in \mathbb{R},\ 2m + 3(mx + p) = 6x + 1$

$\forall x \in \mathbb{R},\ 2m + 3mx + 3p = 6x + 1$

$\forall x \in \mathbb{R},\ 3mx + 3p + 2m = 6x + 1.$

Par identifica° : $\begin{cases} 3m = 6 & \text{m̂ cd} \\ 3p + 2m = 1 & \text{m̂ ordonnée à l'origine} \end{cases}$

$$\begin{cases} m = \frac{6}{3} = 2 \\ p = \frac{1-2m}{3} = \frac{1-2\times 2}{3} = \frac{-3}{3} = -1 \end{cases}$$

Bref, $g(x) = 2x - 1$.

b) supposons f sol° de (E) sur $\mathbb{R}$. [Mq $f-g$ sol de (E') sur $\mathbb{R}$.]

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = f(x) - (2x-1)$

$(f-g)(x) = f(x) - 2x + 1$.

[Mq $\forall x \in \mathbb{R}$, $2(f-g)'(x) + 3(f-g)(x) = 0$]

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f-g)'(x) = f'(x) - 2$.

Donc : $2(f-g)'(x) = 2f'(x) - 4$

Donc : $2(f-g)'(x) + 3(f-g)(x) = 2f'(x) - 4 + 3(f(x) - 2x + 1)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2(f-g)'(x) + 3(f-g)(x) = 2f'(x) + 3f(x) - 6x - 1$.

Or f est sol° de (E) sur $\mathbb{R}$, donc :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2f'(x) + 3f(x) = 6x + 1$

Ainsi on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $2(f-g)'(x) + 3(f-g)(x) = 6x + 1 - 6x - 1 = 0$.

Ainsi $f-g$ est bien sol° de (E') où (E') : $2y' + 3y = 0$.

Réciproque : Supposons que $f-g$ soit sol° de (E') :

But : Mq f est sol° de (E).

$f-g$ est sol° de (E') donc :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2(f-g)'(x) + 3(f-g)(x) = 0$

$2f'(x) - 2g'(x) + 3f(x) - 3g(x) = 0$

$2f'(x) + 3f(x) - 2g'(x) - 3g(x) = 0$

Or, $g(x) = 2x - 1$ donc $g'(x) = 2$

Donc $2f'(x) + 3f(x) - 2\times 2 - 3(2x-1) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $2f'(x) + 3f(x) - 4 - 6x + 3 = 0$

$2f'(x) + 3f(x) - 6x - 1 = 0$

$2f'(x) + 3f(x) = 6x + 1$

Ainsi f est sol° de (E).

Ainsi f sol° de (E) sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $f - g$ sol° de (E') sur $\mathbb{R}$.

c) Résolvons (E') : $2y' + 3y = 0$

$2y' = -3y$

$y' = -\frac{3}{2}y$

De la forme : $y' = ay$ où $a = -\frac{3}{2}$.

Les sol° de (E') sur $\mathbb{R}$ st les f° h définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

D'après q. b) : f sol° de (E) sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $f - g$ sol° de (E') sur $\mathbb{R}$.

Donc $(f-g)(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}$ car $f - g$ sol° de (E') et on connait ici $\mathcal{S}_{(E')}$.

$f(x) - g(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}$

$f(x) = ke^{-\frac{3}{2}x} + g(x)$ où $g(x) = 2x - 1$

$f(x) = ke^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1$; $k \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1 \ ; \ k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

d) $f(x) = ke^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1$

$f(4) = 11 \Leftrightarrow ke^{-\frac{3}{2}\times 4} + 2\times 4 - 1 = 11$

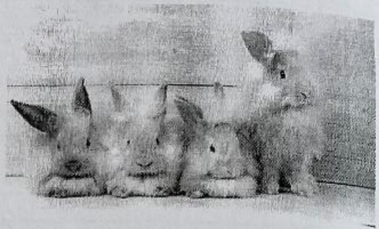
$f(4) = 11 \Leftrightarrow ke^{-6} + 7 = 11 \Leftrightarrow ke^{-6} = 4 \Leftrightarrow k = \frac{4}{e^{-6}} = 4e^{6}$.

Ainsi : $f(x) = 4e^{6} \times e^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1$.

$f(x) = 4e^{-\frac{3}{2}x + 6} + 2x - 1$.

Exercice 17

Modèle de Malthus



L'économiste anglais Thomas Malthus (1766-1844) constate qu'on peut modéliser l'évolution d'une population en supposant que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle à cette population. Si la fonction f associe, à l'instant t exprimé en mois, la population, elle vérifie l'équation différentielle (E_1) $y' = ky$, où k est le coefficient de proportionnalité.

a. Résoudre (E_1), puis déterminer la fonction f pour une population de 10 lapins introduite dans une île, sachant que cette population double au bout de trois mois. *On arrondira les coefficients à 10^{-2}.*

b. Représenter f dans le plan.

Modèle de Verhulst

Le modèle de Malthus n'est pas réaliste : à long terme, l'espace restreint ou la quantité de nourriture disponible freinent l'accroissement de la population.

Le modèle de Verhulst est basé sur l'hypothèse que la vitesse d'accroissement est proportionnelle, d'une part à la population $g(t)$, et d'autre part à la capacité d'accueil encore disponible $M - g(t)$, où M est une constante représentant l'effectif maximal qui peut apparaître au sein de cette population.

Si on suppose que l'île ne peut contenir plus de 1 000 lapins, la fonction g (en milliers de lapins) vérifie alors l'équation logistique (E_2) $y' = ay(1-y)$, où $a = 0{,}05$.

a. On pose $z = \frac{1}{y}$. Montrer que l'équation (E_2) équivaut à $z' + az = a$. (E_3)

b. Résoudre l'équation différentielle (E_3), et montrer que $g(t) = \frac{1}{1 + 99e^{-0{,}05t}}$.

c. Étudier g sur $[0\,;+\infty[$ et représenter g dans le plan : on obtient la **courbe logistique.**

$t \geq 0$ avec t en mois

a) f est sol° de (E_1) : $y' = ky$ où $k \in \mathbb{R}$.

D'après le cours, les sol° de (E_1) st définies par : $f(t) = \lambda e^{kt}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{S}_{(E_1)} = \left\{ \begin{array}{l} [0\,;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{kt} \end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Or 10 lapins au départ, donc : $f(0) = 10$

$\lambda e^0 = 10$

$\lambda = 10$

et $f(t) = 10e^{kt}$

De +, $f(3) = 20$ (doublement de pop° en 3 mois)

Donc : $10e^{3k} = 20$

$e^{3k} = \frac{20}{10} = 2$ donc $3k = \ln(2)$

$k = \frac{\ln(2)}{3}$.

Modèle de Verhulst

$g(t)$: nb de lapins en milliers de l'île à l'instant t.

a) g est sol° de (E_2) : $y' = ay(1-y)$ où $a = 0{,}05$.

(E_2) : $y' = 0{,}05y(1-y)$

↳ (E_2) n'est pas de la forme : $y' = ay$ où $y' = ay+b$!

$z = \frac{1}{y}$: z et y st des $f°$.
↳ $f°$ qui s'annule pas sur $[0; +\infty[$.

$z(t) = \frac{1}{y(t)} \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{z(t)}$ → y est dérivable sur $[0; +\infty[$ car sol° de (E_2) et y ne s'annule pas, donc $z = \frac{1}{y}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Donc : $y'(t) = \frac{-z'(t)}{(z(t))^2}$.

Et y sol° de (E_2) donc :

$y'(t) = ay(t)(1-y(t))$

$\frac{-z'(t)}{(z(t))^2} = a \times \frac{1}{z(t)}\left(1 - \frac{1}{z(t)}\right)$

$-z'(t) = az^2(t) \times \frac{1}{z(t)}\left(1 - \frac{1}{z(t)}\right)$

$-z'(t) = az(t)\left(1 - \frac{1}{z(t)}\right)$

$-z'(t) = az\cancel{(t)}\left(\frac{z(t)-1}{z\cancel{(t)}}\right)$

$-z'(t) = a(z(t)-1)$

$z'(t) = -a(z(t)-1) = a(1-z(t))$

$z'(t) = a - az(t)$

$z'(t) + az(t) = a$

z est sol° de (E_3).

b) (E_3) : $z' + 0,05\, z = 0,05$ $\quad (a = 0,05)$

(E_3) s'écrit aussi : $z' = -0,05z + 0,05$

(E_3) est donc de la forme : $z' = \tilde{a} z + b$ où $\tilde{a} = -0,05$
$b = 0,05$

Donc $z(t) = ke^{-0,05t} - \frac{b}{\tilde{a}} = ke^{-0,05t} - \frac{0,05}{-0,05}$

$z(t) = ke^{-0,05t} + 1$ où $k \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{S}(E_3) = \left\{ \begin{array}{l} [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto ke^{-0,05t} + 1 \end{array} ; k \in \mathbb{R} \right\}$

g est sol° de (E_2) sur $[0; +\infty[$.

Or (E_2) est équivalente à (E_3).

Donc $\frac{1}{g}$ est sol° de (E_3).

Donc $\exists k \in \mathbb{R}, \forall t \in [0; +\infty[, \frac{1}{g(t)} = ke^{-0,05t} + 1$

Donc $g(t) = \frac{1}{ke^{-0,05t} + 1}$

Or à $t = 0$, il y a 10 lapins, donc $\frac{10}{1000}$ de milliers d'individus.

Donc $g(0) = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$

Ainsi : $\frac{1}{ke^{0} + 1} = \frac{1}{100}$

$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{100}$

$k + 1 = 100$

$k = 99$

Donc $g(t) = \frac{1}{1 + 99e^{-0,05t}}$

c) Etude de g sur $[0; +\infty[$:

$g(t) = \frac{1}{u(t)}$ où $u(t) = 1 + 99e^{-0,05t}$

$u'(t) = 0 + 99 \times (-0,05e^{-0,05t})$

$u'(t) = -4,95e^{-0,05t}$

$g'(t) = \frac{-u'(t)}{(u(t))^2}$

$g'(t) = \frac{4,95e^{-0,05t}}{(1+99e^{-0,05t})^2}$

Or $\forall t \in [0;+\infty[$, $e^{-0,05t} > 0$, $4,95 > 0$. Démo. > 0.

Donc $g'(t) > 0$: g est strict $\nearrow$ sur $[0,+\infty[$.

$\lim_{t\to+\infty} -0,05t = -\infty$, et $\lim_{X\to-\infty} e^{X} = 0$.

Donc par composée : $\lim_{t\to+\infty} e^{-0,05t} = 0$.

Donc par produit, somme : $\lim_{t\to+\infty} (1+99e^{-0,05t}) = 1$.

Et par quotient : $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 1$.

À long terme, la pop° de lapins tend à se stabiliser à 1000 individus.

14

Exercice 19

Résoudre l'équation différentielle : $Li' + Ri = E$ (L, R et E sont des constantes physiques strictement positives) et sachant qu'à l'instant $t = 0$, l'intensité i est nulle

$Li' + Ri = E$ avec $i(0) = 0$

$Li' = -Ri + E$

$i' = \frac{-Ri+E}{L}$ donc : $i' = \frac{-R}{L}i + \frac{E}{L}$: sous forme résolue.

Ceci est de la forme : $y' = ay + b$ avec : $a = \frac{-R}{L}$ et $b = \frac{E}{L}$.

D'après le cours on a : $\forall t \in [0;+\infty[$, $i(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} - \frac{b}{a}$

$i(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} - \frac{\frac{E}{L}}{\frac{-R}{L}}$

$i(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Enfin on a la condi° initiale :

$i(0) = 0 \iff ke^{0} + \frac{E}{R} = 0$

$i(0) = 0 \iff k = \frac{-E}{R}$

Donc $i(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$.

$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

Exercice 20

Évolution d'une population de pandas

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population de pandas roux qui semble en voie de disparition.

En 2020, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est 1 000.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2020).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, et satisfait l'équation

1. Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)\left(3 - \ln(f(t))\right)$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}$.

2. Résoudre l'équation différentielle **(H)** :

$$z' = \frac{1}{20} z - \frac{3}{20}.$$

3. En déduire l'expression de la fonction f.

4. Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à 20 individus ?

- En 2020 : 1000 pandas
- $f(t)$ = le nb de milliers de pandas en l'an $2020 + t$.

1. $f'(t) = \frac{-1}{20} f(t) \left(3 - \ln(f(t)) \right)$

Soit $g = \ln f$ càd : $\forall t > 0$, $g(t) = \ln(f(t))$ et $g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$.

Donc $f'(t) = \frac{-1}{20} f(t) \left(3 - g(t)\right)$

Donc $\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{-1}{20} \left(3 - g(t)\right)$ car $f(t) > 0$.

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{-3}{20} + \frac{1}{20} g(t)$$

$$g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}.$$

Donc g est sol° sur $[0;+\infty[$ de l'E.D. (H) : $z' = \frac{1}{20} z - \frac{3}{20}$.

2. (H) est de la forme : $z' = az + b$ avec $a = \frac{1}{20}$ et $b = \frac{-3}{20}$.

D'après le cours : $z(t) = ke^{\frac{1}{20}t} - \frac{b}{a}$

$$z(t) = ke^{\frac{1}{20}t} - \frac{\frac{-3}{20}}{\frac{1}{20}}$$

$$z(t) = ke^{\frac{t}{20}} + 3$$ où $k \in \mathbb{R}$. $\mathcal{S}_{(H)} = \left\{ \begin{array}{l} [0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto ke^{\frac{t}{20}} + 3 \end{array} \right\}$

3. Or $g = \ln(f)$ est solu° de (H) donc :

$\forall t \in [0;+\infty[$, $g(t) = ke^{\frac{t}{20}} + 3$.

$$\ln(f(t)) = ke^{\frac{t}{20}} + 3$$

Donc $$e^{\ln(f(t))} = e^{ke^{\frac{t}{20}} + 3}$$

$$f(t) = e^{ke^{\frac{t}{20}} + 3}$$

Enfin (condi° initiale) : $f(0) = 1$.

Donc $e^{ke^{\frac{0}{20}} + 3} = 1$

$$e^{k+3} = 1 = e^0$$

Donc $k + 3 = 0$

$$k = -3$$

$$f(t) = e^{-3e^{\frac{t}{20}} + 3}.$$

4. Résolvons l' inéqua° :

$f(t) < \frac{20}{1000}$ unités : milliers d' individus.

$e^{-3e^{\frac{t}{20}}+3} < 0,02$

$\ln(e^{-3e^{\frac{t}{20}}+3}) < \ln(0,02)$ car ln ↑ sur $]0;+\infty[$.

$-3e^{\frac{t}{20}}+3 < \ln(0,02)$

$-3e^{\frac{t}{20}} < -3+\ln(0,02)$

$e^{\frac{t}{20}} > \frac{-3+\ln(0,02)}{-3}$ car $-3<0$.

$e^{\frac{t}{20}} > 1-\frac{\ln(0,02)}{3}$

Donc $\ln(e^{\frac{t}{20}}) > \ln\left(1-\frac{\ln(0,02)}{3}\right)$

$\frac{t}{20} > \ln\left(1-\frac{\ln(0,02)}{3}\right)$

$t > 20\ln\left(1-\frac{\ln(0,02)}{3}\right)$ machine : $\approx 16,7$.

Donc au bout de 17 ans il y aura - de 20 individus.

III – Des exercices de type bac plus anciens (2000-2010).

Exercice I

Soit l'équation différentielle notée (E) : $y' + 3y = e^{-3x}$

a) Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = xe^{-3x}$ est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + 3y = 0$.

c) Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de (E_0).

d) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = xe^{-3x}$

On doit mq : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) + 3u(x) = e^{-3x}$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit et composée de f° dérivables sur $\mathbb{R}$.

$u(x) = xe^{-3x} = v(x) \times w(x)$ avec $v(x) = x$ et $w(x) = e^{-3x}$

$v'(x) = 1$ $w'(x) = -3e^{-3x}$

Donc : $u'(x) = v'(x)w(x) + v(x)w'(x)$

Donc : $u'(x) = e^{-3x} + x \times (-3e^{-3x})$

$u'(x) = e^{-3x} - 3xe^{-3x}$

Ainsi, $u'(x) + 3u(x) = e^{-3x} - 3xe^{-3x} + 3xe^{-3x}$

$u'(x) + 3u(x) = e^{-3x}$.

Donc u est sol° de (E).

b) $(E_0) : y' + 3y = 0$

$y' = -3y$

Les f° sol° de (E_0) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ke^{-3x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{S}(E_0) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{-3x} \end{array} ; k \in \mathbb{R} \right\}$$

c) Supposons que v est sol° de (E) : v est dérivable et donc :

$\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) + 3v(x) = e^{-3x}$

Mq $v-u$ est sol° de (E_0) :

$v-u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de f° dérivables).

Et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(v-u)'(x) + 3(v-u)(x) = v'(x) - u'(x) + 3v(x) - 3u(x)$

$= v'(x) + 3v(x) - (u'(x) + 3u(x))$

$= e^{-3x} - e^{-3x}$ $\quad$ $\underset{\displaystyle e^{-3x}}{\shortparallel}$ d'après q.a.

$= 0$

Donc $v-u$ est sol° de (E_0).

Réciproque : supposons $v-u$ sol° de (E_0) :

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(v-u)'(x) + 3(v-u)(x) = 0$

$v'(x) - u'(x) + 3v(x) - 3u(x) = 0$

$v'(x) + 3v(x) = u'(x) + 3u(x)$

$\shortparallel$

e^{-3x} d'après q.a., u est sol° de (E).

Donc $v'(x) + 3v(x) = e^{-3x}$, donc v est sol° de (E).

v est sol° de (E) $\Leftrightarrow$ $v - u$ sol° de (E_0).

d) Soit v une sol° de (E), alors :
$v - u$ est sol° de (E_0).

Donc par q. b) :

$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \ v(x) - u(x) = ke^{-3x}$

$v(x) = ke^{-3x} + u(x)$ avec $u(x) = xe^{-3x}$.

Donc : $v(x) = ke^{-3x} + xe^{-3x}$

$v(x) = e^{-3x}(x + k) \ ; \ k \in \mathbb{R}$.

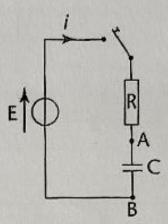
$$\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-3x}(x+k) \ ; \ k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

$-\frac{b}{a}$

IV – Quelques problèmes issus de la Physique faisant intervenir des équations différentielles

Exemple 1

Un circuit comprend un générateur de force électromotrice E, un dipôle (R, C) (association en série d'un condensateur de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R) et un interrupteur.



À tout instant $t \geqslant 0$, en secondes :

- on note $i(t)$ l'intensité en ampères dans le circuit ;
- la charge $q(t)$ du condensateur et la tension $u(t)$ à ses bornes sont liées par la relation $q(t) = Cu(t)$;
- la tension aux bornes du générateur est égale à la somme des tensions aux bornes du générateur et de la résistance : $u(t) + Ri(t) = E$;
- la charge du condensateur et l'intensité du courant produit lors de la fermeture de l'interrupteur sont liées par la relation $i(t) = \dfrac{dq}{dt}(t) = q'(t)$.

1. Expression de $q(t)$

a) Expliquer pourquoi la charge q du condensateur est telle que $Rq' + \dfrac{1}{C}q = E$.

b) Résoudre cette équation différentielle.

c) On suppose que le condensateur est sans charge initiale, c'est-à-dire que : $q(0) = 0$. Exprimer $q(t)$ en fonction de t.

2. Interprétation de la constante de temps

a) Déterminer la charge finale Q du condensateur, il s'agit de la limite de la fonction q en $+\infty$.

b) On note $\tau = RC$. À quel pourcentage, arrondi à l'unité, de sa charge maximale Q le condensateur est-il chargé après une durée de charge égale à τ ? égale à 5τ ?

3. Étude de la fonction q

$\mathscr{C}$ est la courbe représentant q dans un repère orthogonal d'origine O *(unités graphiques : 1 cm pour 50 s en abscisses et 1 cm pour 1 C en ordonnées).*

a) Dresser le tableau de variation de la fonction q.

b) Vérifier que la droite (OT) où T est le point de coordonnées $(\tau ; Q)$ est tangente à $\mathscr{C}$ en O.

1. a. $u(t) + Ri(t) = E$ et $i(t) = q'(t)$

Donc $u(t) + Rq'(t) = E$.

Enfin $q(t) = cu(t)$, donc $u(t) = \frac{q(t)}{c}$ avec $c \neq 0$.

Donc $\frac{q(t)}{c} = Rq'(t) = E$

$Rq'(t) + \frac{q(t)}{E} = E$

Donc q est sol° de $Rq' + \frac{1}{c}q = E$.

b. $\# \quad Rq' + \frac{1}{c}q = E$

$Rq' = \frac{-1}{c}q + E$

$R \neq 0$, donc $q' = \frac{1}{R}\left(\frac{-1}{c}q + E\right)$

$q' = \frac{-1}{Rc}q + \frac{E}{R}$ de la forme $y' = ay + b$

avec $a = \frac{-1}{Rc}$ et $b = \frac{E}{R}$.

Les f° sol° de $\#$ st définis sur $[0; +\infty[$ par :

$q(t) = Ke^{\frac{-1}{Rc}t} - \frac{b}{a}$

$q(t) = Ke^{\frac{-t}{Rc}} - \frac{\frac{E}{R}}{\frac{-1}{Rc}}$ $\qquad \frac{\frac{E}{R}}{\frac{1}{Rc}} = \frac{E}{R} \times Rc = Ec$

$q(t) = Ke^{\frac{-t}{Rc}} + Ec$ où $K \in \mathbb{R}$

c. $q(0) = 0 \iff Ke^{0} + Ec = 0 \iff K = -Ec$

Donc $q(t) = -Ece^{\frac{-t}{Rc}} + Ec$

$q(t) = Ec\left(1 - e^{\frac{-t}{Rc}}\right)$

2. a. $E, R, C > 0$ donc $Rc > 0$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{-t}{Rc} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

Donc par composé : $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{\frac{-t}{Rc}} = 0$

Puis par produit et somme : $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t) = Ec$.

b. $\tau = Rc$

Donc $q(t) = Ec\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$

Donc $q(\tau) = Ec\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right)$

$q(\tau) = Ec\,(1 - e^{-1})$

Or Ec = charge maximale

Donc $\frac{q(\tau)}{Ec} \times 100 = (1 - e^{-1}) \times 100 \approx 63$

Au bout d'un τ, le condensateur est chargé à 63% de sa charge maximale.

Si $t = 5\tau$: $\frac{q(5\tau)}{Ec} \times 100 = (1 - e^{-5}) \times 100 \approx 99$

Au bout de 5τ, le condensateur est chargé à de 99% de sa charge maximale.

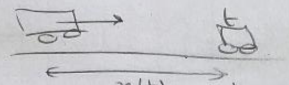
3. a. $q(t) = EC\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$

$q'(t) = EC \times \left(-\left(\frac{-1}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\right)$

$q'(t) = \frac{EC}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}} > 0$

Donc q croît sur $[0 ; +\infty[$.

0	0		$+\infty$
$q(t)$	0	$\nearrow$	EC



$x(t)$ = distance parcourue par le chariot à l'instant t.

Exemple 2

Un chariot de masse 200 kg se déplace à partir d'une origine O sur une voie rectiligne et horizontale. $x(t)$ est la distance, en mètre, qui le sépare de l'origine en fonction du temps t, en seconde ($t \geqslant 0$).

D'après les lois de Newton, la fonction x vérifie $200x'' + 25x' = 50$ où x'' est la dérivée de la fonction dérivée x' par rapport au temps t.

1. Déterminer $x(0)$.

2. $v(t)$ est la vitesse du chariot à l'instant t et vérifie $v(t) = x'(t)$.

a) Démontrer que x vérifie $200x'' + 25x' = 50$ si, et seulement si, la fonction v vérifie $v' = -0{,}125v + 0{,}25$.

b) Résoudre sur $[0\,;+\infty[$ l'équation différentielle :

$$y' = -0{,}125y + 0{,}25.$$

c) La vitesse initiale du chariot est supposée nulle, ainsi $v(0) = 0$.

Déterminer alors la vitesse $v(t)$ pour tout réel t.

d) Étudier la limite de v en $+\infty$ et interpréter le résultat.

3. a) Démontrer alors que la fonction x est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$x(t) = 2t - 16 + 16e^{-0{,}125t}.$$

b) Quelle est la distance, en m, parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? *Arrondir au dixième.*

<u>Complément</u> : exercice 131 page 397 (équation différentielle du second ordre à coefficients constants).

x vérifie l'ED : $200x'' + 25x' = 50$

$$200\,x''(t) + 25\,x'(t) = 50$$

1) $x(0) = 0$ (condi° initiale)

2) $v(t) = x'(t)$ donc $v'(t) = x''(t)$

a. x est sol° de : $200x'' + 25x' = 50 \iff 200v' + 25v + 50$

$\iff 200v' = -25v + 50$

$\iff v' = \dfrac{-25v + 50}{200}$

$\iff v' = \dfrac{-25}{200} + \dfrac{50}{20}$

$\iff v' = -0{,}125v + 0{,}25$

b. $y' = -0{,}125y + 0{,}25$: forme : $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}125$ et $b = 0{,}25$.
Donc les sol° st les f° f définies sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = ke^{-0{,}125t} - \frac{b}{a}$.

$f(t) = ke^{-0{,}125t} - \dfrac{0{,}25}{-0{,}125}$

$f(t) = ke^{-0{,}125t} + 2.$

c. $v(t) = ke^{-0{,}125t} + 2$, car v sol° de $y' = -0{,}125y + 0{,}25$

$v(0) = 0 \iff ke^{0} + 2 = 0$

$k = -2$

$v(t) = -2e^{-0{,}125t} + 2.$

d. $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 2.$

3a) $x'(t) = v(t) = -2e^{-0{,}125t} + 2$

$x(t) = -2 \times \dfrac{e^{-0{,}125t}}{-0{,}125} + 2t + \lambda$