Chapitre VIII — Vecteurs, droites et plans de l'espace

I – Vecteurs de l'espace

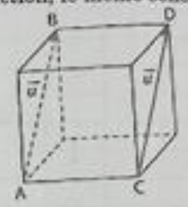
I.1 Définitions et règles de calcul

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace.

1. A tout couple de points (A, B) de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ définit comme suit :

- Lorsque A et B sont distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a :
  - Pour direction celle de la droite (AB).
  - Pour sens celui de A vers B.
  - Pour longueur (synonyme norme) la distance AB. On note : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
- Lorsque A et B sont confondus, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul noté $\vec{0}$.

On dit que deux vecteurs non nuls sont égaux lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même norme. On note : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (voir figure ci-contre).



2. Lorsque quatre points A, B, C, D ne sont pas alignés on a :

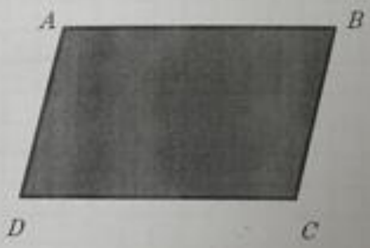
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **équivaut à dire que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.**

On appelle ***représentant d'un vecteur*** $\vec{u}$ donné ***tout vecteur égal à*** $\vec{u}$.

3. Pour tout point A de l'espace et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point B tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

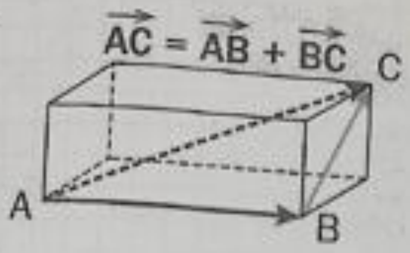
4. Les règles de calculs sur les vecteurs sont les mêmes qu'avec les vecteurs du plan.

☛ Toujours faire un croquis lorsqu'on parle de parallélogramme : attention à l'erreur classique : "ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$" : c'est faux : regardez-ci-dessous, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas égaux mais opposés car pas le même sens. Au passage, l'opposé du vecteur $\overrightarrow{CD}$ c'est $\overrightarrow{DC}$ avec pour notation : $-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$



La relation de *Chasles* dit que : pour tout point A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Illustration :

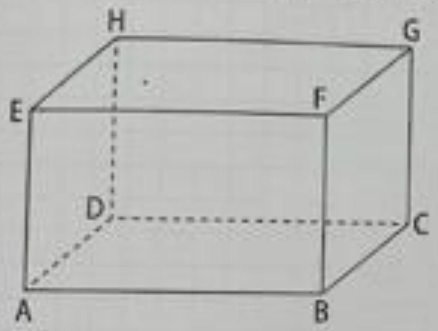


Elle est applicable à plus de deux vecteurs. Par exemple : $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{IL}$

Notons que la relation de *Chasles* donne un moyen simple d'additionner deux vecteurs de l'espace. Dans le cas fréquent où l'extrémité du premier vecteur n'est pas identique à l'origine du second vecteur, on peut toujours, en utilisant un représentant d'un des vecteurs, se ramener à utiliser la relation de *Chasles*.

Exemple

A l'aide des points de la figure ci-dessous qui est un pavé droit (= parallélépipède rectangle), donner :



i) un représentant du vecteur : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH}$

ii) Le représentant d'origine E du vecteur $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EC}$

Enfin dire qu'un point D est l'image d'un point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ signifie que : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

Illustration :

Quelle est l'image du point H par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$ sur la figure ci-dessus ? F

I.2 *Vecteurs colinéaires*

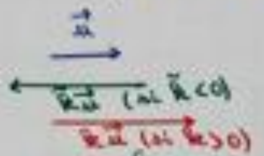
Rappel

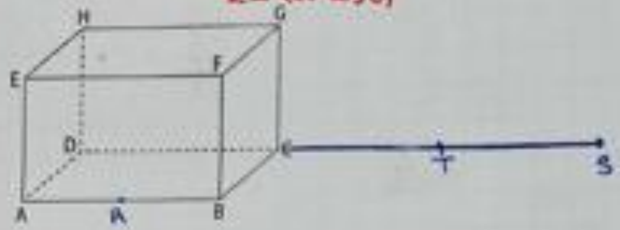
Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est tel que :

- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction ;
- si $k > 0$, alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens, sinon, ils sont de sens contraire ;
- $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

On rappelle que $|k| = \begin{cases} k \text{ si } k > 0 \\ -k \text{ si } k < 0 \end{cases}$

Illustration :





Construire ci-dessus les point R, S et T définis par : $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CS} = -2\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}$.

***Définition*♥**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont *colinéaires* équivaut à dire *qu'ils ont la même direction*, autrement dit :
♥ *$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$.*♥

On convient que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace.

Illustration :

♥♥ Propriété phare ♥♥
A, B, C et D sont quatre points distincts de l'espace.
1) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ [illegible].......
2) Les points A, B et C sont alignés équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Attention, cette propriété sera d'un ***usage fréquent*** dans ce chapitre, surtout quand on disposera des coordonnées des points et des vecteurs.

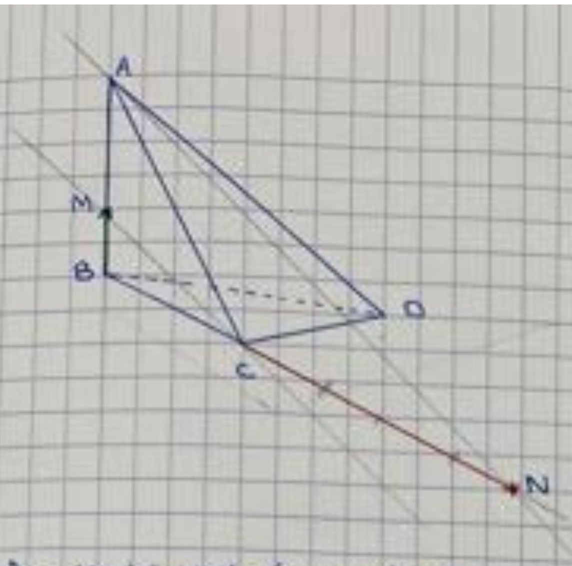
Point 2) : prenez le temps de bien le comprendre : les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires équivaut à dire que les droites (AB) et (AC) sont parallèles : or deux droites parallèles qui ont un point en commun, ici A, sont confondues : les trois points A, B et C sont sur la même droite et donc alignés !!!

Exercice 1

1) Construire un tétraèdre ABCD, puis construire les points M et N définis par :
$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.

2) Démontrer que les droites (MC) et (AN) sont parallèles.

1)



2) Rappel : (MC) ∥ (AN) équivaut à prouver que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

But : $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{AN}$ où $k \in \mathbb{R}$

D'après la rela° de Chasles : $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}$.

Or $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{BM} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

De m̂ :

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$
$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

Donc $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MC}$ (en effet : $3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AN}$)

Par suite, $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{MC}$ st colin, donc (AN) et (MC) sont parallèles

1.3 Combinaison linéaire de vecteurs

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

♥♥Un vecteur $\vec{w}$ est appelé ***une combinaison linéaire des vecteurs*** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe des réels *a* et *b* tels que : ♥ $\vec{w} = a.\vec{u} + b.\vec{v}$...♥

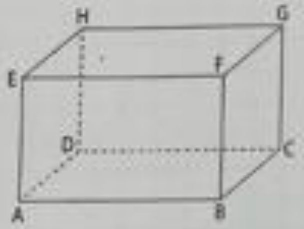
Exemple : la relation : $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$ permet de dire que le vecteur $\overrightarrow{DR}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

Bien évidemment, cette définition se généralise à une combinaison linéaire de 3 vecteurs ou plus.

Cette année, on utilisera fréquemment des combinaisons linéaires de trois vecteurs :

Reprenons le pavé droit ci-dessous :

Ecrire $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.



$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

Exercice 2

SABCD est une pyramide de sommet S et dont la base est un carré ABCD de centre I.

a) Faire une figure.

b) Exprimer $\overrightarrow{SI}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SC}$.

c) En déduire que $\overrightarrow{SD}$ est une combinaison linéaire (à préciser) des vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$.

a)

b) $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IC}$

Donc $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}}_{=\vec{0}}$

car ABCD carré de centre I

Donc $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SI}$

Donc $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$

c) On a m̂ : $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SD}$

Donc : $\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SI}$

×2 $\left\{ \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} \right\}$ ×2

Donc : $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$

II – Droites et plan de l'espace

Tout d'abord, intuitivement, un plan est une surface "plate" illimitée. Par exemple le plan formé par le tableau est un exemple de plan. Il se représente dans l'espace par un parallélogramme lorsqu'il est regardé non frontalement, et par un rectangle sinon.

Exemples : Sur la figure précédente, le plan contenant le rectangle ABCD est représenté par un parallélogramme (car vu non frontalement), tandis que le plan contenant le rectangle ABFE est représenté par un rectangle car vu frontalement.

1) Règles d'incidence

Quelques axiomes utiles (appelés règles d'incidence) et utilisés en permanence durant tout le chapitre…

1) Par *deux points distincts* de l'espace, il passe une *unique* droite.

***Illustration* :**

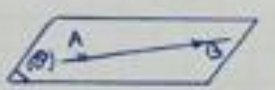
L'unique droite passant par A et B, où $A \neq B$ est la droite (AB).

2) *Trois points non alignés* de l'espace définissent un *unique* plan.

***Notation et illustration* : si A, B et C ne sont pas alignés, le plan passant par les points A, B et C est noté : (ABC). *Remarque* : (BCA) désigne le même plan que (ABC) !**

3) Si deux points A et B sont distincts et qu'ils appartiennent à un même plan ($\mathcal{P}$), alors la droite (AB) est incluse dans ce plan ($\mathcal{P}$).

***Illustration* :**

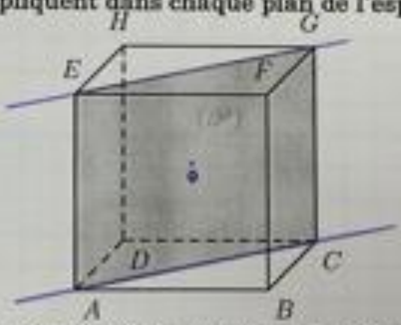


si $\begin{cases} A \in (\mathcal{P}) \\ B \in (\mathcal{P}) \\ A \neq B \end{cases}$ alors $(AB) \subset (\mathcal{P})$

Les propriétés connues de géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

Exemples

Dans le cube ABCDEFGH ci-contre :



a) Donner 4 noms différents du plan ($\mathcal{P}$) ci-contre.

b) Expliquer pourquoi la droite qui passe par A et par le point O intersection des droites (EC) et (AG) est contenue dans le plan ($\mathcal{P}$).

c) Démontrer que (EG) et (AC) sont parallèles.

a) $(\mathcal{P})$ s'appelle aussi : (AEG) ou (EAC) ou (ACG) ou (EGC).

b) $A \in (\mathcal{P})$: évidence (q.a))

$E \in (\mathcal{P})$; $C \in (\mathcal{P})$, donc d'après le 3e axiome d'incidence, $(EC) \subset (\mathcal{P})$.

De m̂ : $A \in (\mathcal{P})$, $G \in (\mathcal{P})$ donc $(AG) \subset (\mathcal{P})$.

Par suite $(EC) \cap (AG)$ qui est le point O appartient à $(\mathcal{P})$.

$A \in (\mathcal{P})$, $O \in (\mathcal{P})$ et $A \neq O$. Donc d'après le 3e axiome d'incidence, $(AO) \subset (\mathcal{P})$.

c) $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Or ABCDEFGH est un cube, donc :

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ (car EFBA est un carré) et $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$ (car BFGC carré).

Par suite : $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$; par suite (EG) // (AC).

2) Droites de l'espace

***Propriété** (caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace)*

Soient A et B deux points distincts de l'espace noté $\mathcal{E}$.

La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Traduction mathématique de la phrase précédente : le $\exists$ signifie : il existe (au moins un).

$(AB) = \{M \in \mathcal{E} / \exists\, t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}\}$.

Cette caractérisation d'une droite nous servira pour en donner une représentation paramétrique des droites de l'espace.

Preuve : Comprenez bien qu'où que soit placé le point M sur la droite (AB), les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires !!!

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires signifie, par définition même de deux vecteurs colinéaires, qu'il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$!!

Remarques importantes

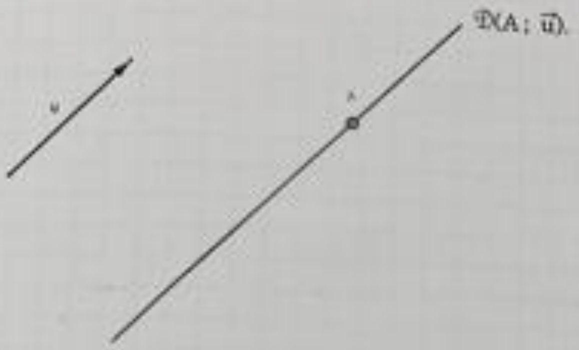
1. $\overrightarrow{AB}$ est appelé un vecteur directeur de la droite (AB). On dit encore que la droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ est un autre vecteur directeur de la droite (AB), tout comme $1{,}84\overrightarrow{AB}$, donc évitez de dire le vecteur directeur de la droite (AB), il y a une différence fondamentale entre un article indéfini (non-unicité) et un article défini (unicité) !!

Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs : si $\vec{u}$ désigne l'un d'eux, alors, pour tout réel k non nul, $k\vec{u}$ est également un autre vecteur directeur de cette droite !

2. On retiendra que comme dans le plan, une droite peut être définie par la donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$ non nul, appelé vecteur directeur de la droite.

Illustration : La droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ est parfois notée $\mathcal{D}(A\,;\,\vec{u})$.



3. ♥**Deux droites de l'espace sont *parallèles* si et seulement si elles ont des *vecteurs directeurs colinéaires*.**♥

☛ *Capital pour les exercices.*

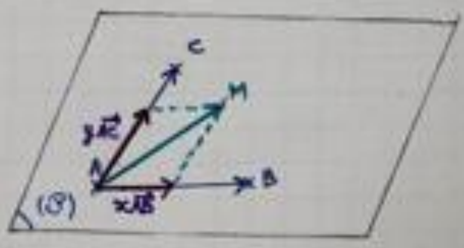
Illustration :

𝒟 // Δ car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3 – Vecteurs et plans de l'espace

Théorème ***(caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace).***   Soit A, B et C ***trois points non alignés*** de l'espace noté $\mathcal{E}$ Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire tels que : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec x et y réels. $(ABC) = \{M \in \mathcal{E} \,/\, \exists (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\}$.

Illustration :



Preuve : conséquence directe du fait que A, B et C ne soient pas alignés, donc le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan, et d'après le cours de première, tout vecteur $\overrightarrow{AM}$ se décompose de façon unique suivant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Remarques fondamentales

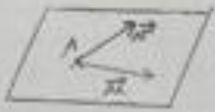
Dans le cadre du théorème précédent, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC).
↳ non clin

Un plan possède une infinité de couples de vecteurs directeurs. Pourquoi ?

Car si $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan, il en est de même pour le couple formé par : $(k\overrightarrow{AB} ; l\overrightarrow{AC})$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ et $l \in \mathbb{R}^*$

On peut définir un plan $\mathcal{P}$ par la donnée d'un point A et de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

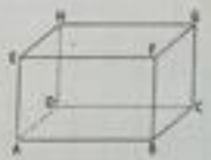
On notera : $\mathcal{P} = (A ; \vec{u} ; \vec{v})$ un tel plan. ♥Un ***couple de vecteurs non colinéaires*** du plan $\mathcal{P}$ est appelé une base du plan $\mathcal{P}$.♥

Illustration : $\mathcal{P}$ 

Exemple

Dans le pavé droit ci-dessous, définir le plan (EHD) par la donnée d'un point et d'un couple de vecteurs non colinéaires. Citer trois points appartenant au plan $(G ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD})$.

↳ (EFG) = (HGF)



$(EHD) = (E ; \overrightarrow{EA} ; \overrightarrow{EH})$ ou $(EHD) = (A ; \overrightarrow{DA} ; \overrightarrow{DH})$

Définition (points coplanaires)

Des points de l'espace sont dits coplanaires s'il existe un plan qui contient tous ces points.

Dans l'exemple précédent, les points A, B, C et D sont coplanaires car contenus dans le plan (ABC).

Trois points de l'espace sont toujours coplanaires.

S'il n'existe aucun plan contenant 4 points donnés (ou plus), on dit que ces points ne sont pas coplanaires !

C'est par exemple le cas lorsqu'on a un tétraèdre ABCD : les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires !

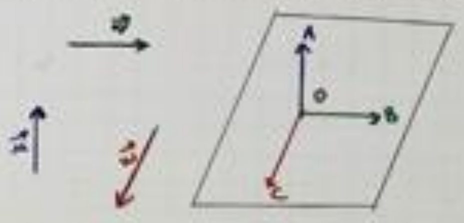
Enfin, comme nous le verrons au paragraphe position relative de droites et de plans, deux droites de l'espace parallèles sont toujours coplanaires.

Définition (vecteurs coplanaires)

Dire que ***trois vecteurs de l'espace*** sont ***coplanaires*** signifie que lorsqu'on choisit un point O quelconque de l'espace, les ***extrémités des représentants*** de ces vecteurs d'origine O sont coplanaires avec O.

Donc, dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires équivaut à dire que les quatre points O, A, B et C sont coplanaires, où O est un point quelconque de l'espace, et A, B et C étant les points définis par : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

Illustration :

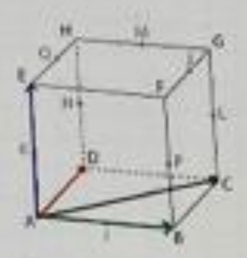


Attention à ne pas confondre vecteurs coplanaires et vecteurs colinéaires : ça n'a rien à voir !!!

Exemple : Dans le cube ci-contre :

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont trois vecteurs coplanaires.

Par contre, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires !



Théorème permet de démontrer que 3 vecteurs sont coplanaires, utile pour les exercices

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des nombres réels x et y tels que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Preuve : Fixons un point O de l'espace. Soit A, B et C les points définis par : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$; $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. Vu que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les points O, A et B ne sont pas alignés et définissent donc le plan (OAB).

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si O, A, B et C sont coplanaires, ce qui équivaut à dire que le point C appartient au plan (OAB).

D'après le théorème précédent de caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace, C appartient au plan (OAB) équivaut donc à dire qu'il existe des réels x et y tels que : $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$.

Ainsi, $\boxed{\vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels } x \text{ et } y \text{ tels que : } \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}}$.

Conséquence importante

Dire que quatre points A, B, C et D de l'espace sont coplanaires équivaut à dire que les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Utile en exercice, *cf.* ci-après.

Exercice 3

Soit ABCD un tétraèdre, et M le point tel que : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que les points A, B, C et M sont coplanaires.

1) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$

$\overrightarrow{AM} = 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM})$

$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{AM}$

$-3\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}(3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA})$

$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

2) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{3}$, donc $\overrightarrow{AM}$ est une CBL (combinaison linéaire) des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas clnr (car A, B, C non alignés).

Par suite : $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont cpnr et par suite A, M, B et C sont des points coplanaires.

III- Repères de l'espace

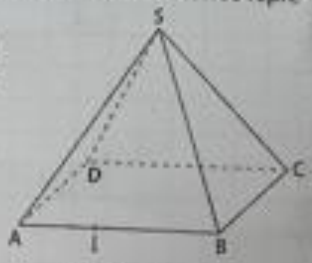
Définition

On appelle ***base de l'espace*** tout ***triplet de vecteurs non coplanaires***.

Dire que $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ est une base de l'espace signifie donc que les trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.

Exemple

SABCD est la pyramide à base carrée représentée ci-contre. I est un point de [AB] distinct des points A et B. Dire dans chaque cas si le triplet de vecteurs est une base de l'espace.



a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})$ **b)** $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SI})$

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})$ est une base de l'espace car $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$ ne sont pas coplanaires car SABCD est une pyramide.

b) $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SI})$ n'est pas une base de l'espace car ces 3 vecteurs sont coplanaires et contenus dans le plan (SAB).

Définition

On appelle *repère de l'espace*, la donnée d'un point O (appelé l'origine du repère) <u>et</u> d'une base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ de l'espace.

On note $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un tel repère de l'espace.

L'axe $(O, \vec{i})$, c'est-à-dire la droite passant par le point O et dirigée par le vecteur $\vec{i}$, est appelé l'axe des abscisses du repère.

L'axe $(O, \vec{j})$ est appelé l'axe de ordonnées.

L'axe $(O, \vec{k})$ est appelé l'axe des cotes.

Illustration :

Attention, l'ordre des vecteurs de la base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ est fondamental ! Changer l'ordre de ces vecteurs revient à changer de repère !!

Bien évidemment, on peut prolonger chaque axe de part et d'autre de O, on ne le fait pas pour ne pas trop surcharger la représentation spatiale.

La propriété suivante généralise celle que vous utilisez dans le plan en géométrie repérée :

Propriété

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un repère de l'espace.

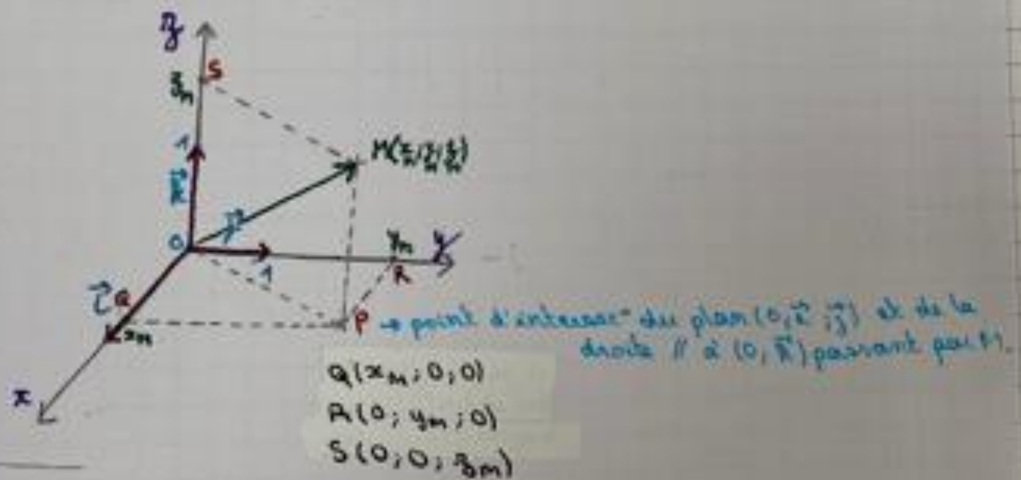
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de réels tels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont les <u>*coordonnées du point M dans le repère*</u> $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

x est appelée l'abscisse du point M, y l'ordonnée du point M et z la cote du point M.

On notera : $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ les coordonnées du point M dans ce repère.

Illustration fondamentale :



Pour lire graphiquement les coordonnées d'un point M de l'espace dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$, on procède comme suit :

On trace la parallèle à $(O\ ;\vec{k})$ passant par le point M : cette dernière traverse le plan $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ en le point nommé P.

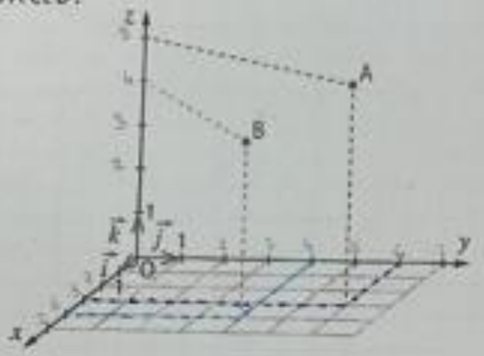
Depuis P on trace la droite parallèle à l'axe des ordonnées qui coupe l'axe des abscisses en le point Q dont l'abscisse est x_M.

On trace la parallèle à l'axe des abscisses qui coupe l'axe des ordonnées en le point R qui a pour ordonnée y_M.

Enfin, la parallèle à (OP) passant par le point M coupe l'axe des ordonnées en le point S de cote z_M.

Exemple

Dans un repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on a représenté les points A et B :



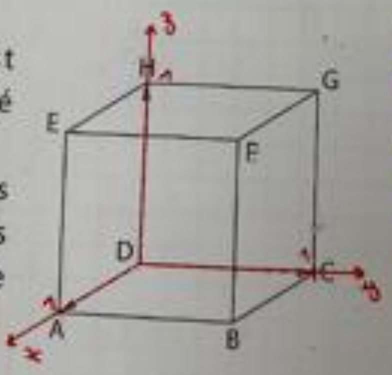
A (3 ; 6 ; 5)
B (4 ; 4 ; 4)

Lire graphiquement les coordonnées des points A et B.

Un ***point de l'espace est donc repéré*** dans un repère de l'espace ***par trois nombres.*** (Cela justifie la terminologie *"espace de dimension 3"*).

Exercice 4

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
Donner les coordonnées de chacun des sommets du cube dans le repère
origine → $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$ → dans z
→ dans y
vecteur unitaire portant l'axe des x



A (1 ; 0 ; 0)
B (1 ; 1 ; 0)
C (0 ; 1 ; 0)
D (0 ; 0 ; 0)
E (1 ; 0 ; 1)
F (1 ; 1 ; 1)
G (0 ; 1 ; 1)
H (0 ; 0 ; 1)

On sait que pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

On définit les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ comme celles du point M dans le repère $(O \; ; \vec{i} \; ; \vec{j} \; ; \vec{k})$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, ***il existe un unique triplet de réels*** $(x \; ; y \; ; z)$ ***tel que :*** $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

> *Cela traduit le fait que tout vecteur de l'espace peut se décomposer suivant trois vecteurs non coplanaires de l'espace.*

On notera $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i} \; ; \vec{j} \; ; \vec{k})$.

La ***notation en colonne*** des ***coordonnées d'un vecteur*** est rigoureuse, et permet lorsqu'on débute, de distinguer les coordonnées d'un vecteur de celles d'un point. ***Pensez-y*** !

__*Point crucial*__ : Si le repère s'appelle $(O \; ; \vec{i} \; ; \vec{j} \; ; \vec{k})$, alors on a : $\boxed{\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; \vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; \vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$, il faut savoir instantanément donner les coordonnées des vecteurs unitaires formant la base de votre repère.

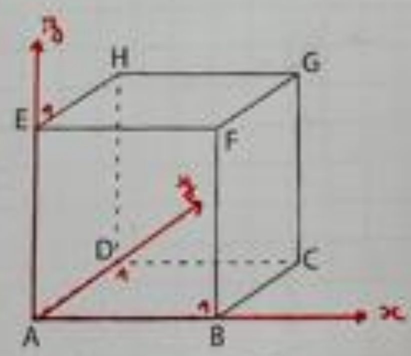
__*Définition*__

Décomposer un vecteur $\vec{u}$ dans une base $(\vec{i} \; ; \vec{j} \; ; \vec{k})$ c'est écrire le vecteur $\vec{u}$ sous la forme :

$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, où x, y et z sont des réels respectivement appelés : première coordonnée (ou abscisse), seconde coordonnée (ou ordonnée), troisième coordonnée (ou cote) du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i} \; ; \vec{j} \; ; \vec{k})$.

Exercice 5

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
Dans chaque cas, donner la décomposition du vecteur dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AG}$ c) $\overrightarrow{GB}$ d) $\overrightarrow{DF}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$= \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB}$
$= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DA}$
$= -\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$
$= 0\overrightarrow{AB} - 1\overrightarrow{AD} - 1\overrightarrow{AE}$

d) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$
$= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$
$= 1\overrightarrow{AB} - 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$

♥♥♥♥Formulaire récapitulatif relatif aux coordonnées ♥♥♥♥

Tous les résultats de la géométrie plane connus concernant les coordonnées s'étendent à l'espace en ajoutant une troisième coordonnée.

Elles sont d'un usage fréquent dans tous les exercices de bac, alors mémorisez-les une fois pour toutes !!!!!

1. Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un repère de l'espace, et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans ce repère.

Alors : $\boxed{\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}}$ et pour tout réel k, $\boxed{k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}}$.

Pour additionner deux vecteurs, on additionne donc respectivement les coordonnées de même nom entre elles, et multiplier un vecteur par un réel k revient à multiplier par k __chacune__ de ses coordonnées.

2. ♥*Deux vecteurs* sont *égaux* si et seulement si : *ils ont les mêmes coordonnées.* ♥

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

3. ♥Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *__colinéaires__* si et seulement si *__leurs coordonnées sont proportionnelles__*. ♥

4. Soit A et B deux points de l'espace.

Si dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$, on a : $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$, alors :

*) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : ♥♥♥ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ ♥♥♥ *(dans tous les exercices de bac).*

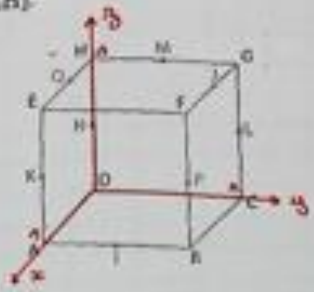
☞Extrémité moins origine comme dit maladroitement le dog, en rappelant que l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point A et son extrémité le point B !!!

**) Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées : ♥♥ $I\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ ♥♥

Essayez de ne pas confondre coordonnées du milieu et coordonnées d'un vecteur.
Chaque année, c'est une erreur fréquente qui montre une grosse capacité de mémorisation....

Exemple

I, J, K, L, M, N, P et Q sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [FG], [AE], [CG], [HG], [HD], [BF] et [EH].



Dans le repère de l'espace (D ; $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DH}$) déterminer :

i) Les coordonnées des points I et Q.

ii) Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DG}$.

iii) Les coordonnées du centre Ω de la face BCGF.

iv) Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{BH} - 3\overrightarrow{GD}$

i) $I(1 ; \frac{1}{2} ; 0)$ et $Q(\frac{1}{2} ; 0 ; 1)$

Car I est le milieu de [AB] avec $A(1;0;0)$ et $B(1;1;0)$

Donc $I\left(\frac{1+1}{2} ; \frac{0+1}{2} ; \frac{0+0}{2}\right)$

Et Q milieu de [EH] avec $E(1;0;1)$ et $H(0;0;1)$.

Donc $Q\left(\frac{1+0}{2} ; \frac{0+0}{2} ; \frac{1+1}{2}\right)$

ii) $A(1;0;0)$ et $C(0;1;0)$

Donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-1=-1 \\ 1-0=1 \\ 0-0=0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D(0;0;0)$ et $G(0;1;1)$

Donc $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii) Ω est le centre du carré BCGF donc c'est un carré a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, Ω est en particulier le milieu de [BG].

Donc $\Omega\left(\frac{x_B+x_G}{2} ; \frac{y_B+y_G}{2} ; \frac{z_B+z_G}{2}\right)$

$\Omega\left(\frac{1}{2} ; 1 ; \frac{1}{2}\right)$

iv) $\vec{u} = 2\overrightarrow{BH} - 3\overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{BH} + 3\overrightarrow{DG}$

$B(1;1;0)$; $H(0;0;1)$; $G(0;1;1)$; $D(0;0;0)$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 0-1=-1 \\ 0-1=-1 \\ 1-0=1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $2\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $3\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercices de base fondamentaux (à maitriser)

On se place dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}, \vec{k})$ *de l'espace.*

Exercice α ***(déterminer si trois points sont alignés ou pas).***

Les points A(5 ; 2 ; 3), B(-1 ; 3 ; 2) et C(-7 ; 4 ; 1) sont-ils alignés ? Même question avec les points A, B et D où D(1 ; 2 ; 3).

Rappel : 3 points A, B et C st alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ st clnr.

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-5=-6\\3-2=1\\2-3=-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-7-5=-12\\4-2=2\\1-3=-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-12\\2\\-2\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc A, B et C sont alignés.

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\dfrac{x_{\overrightarrow{AD}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = \dfrac{-4}{-6} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{y_{\overrightarrow{AD}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = \dfrac{0}{1} = 0.$

Or $\dfrac{2}{3} \neq 0$, donc les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne st pas proportionnelles, donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas clnr, donc A, B et C ne sont pas alignés.

Exercice β ***(prouver que deux droites sont parallèles ; prouver que deux droites sont sécantes).***

Soit A(2 ; 1 ; 5), B(4 ; 2 ; 4), C(3 ; 3 ; 5) et D(0 ; 3 ; 7).

(*i*) Montrer que (AD) et (BC) sont parallèles.

(*ii*) Montrer que (AB) et (CD) sont sécantes.

i) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ dirige (AD) et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige (BC).

Pour prouver que 2 droites sont parallèles, il suffit de prouver qu'elles ont des vecteurs directeurs clnr.

Ici on a : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ st clnr, donc (AD) et (BC) sont parallèles.

ii) Vu que (AD) // (BC) on a : (AD) et (BC) sont donc coplanaires.

En géométrie plane : 2 droites sont soit parallèles (ou confondues) ou sécantes.

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$

$\frac{x_{\overrightarrow{CD}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{-3}{2}$ et $\frac{y_{\overrightarrow{CD}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{0}{1} = 0.$

Or $\frac{-3}{2} \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas clnr.

Donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Or (AB) et (CD) sont coplanaires.

Donc (AB) et (CD) sont sécantes.

Exercice [illegible] ***(prouver que trois points forment un plan, montrer que 4 points sont coplanaires ou non coplanaires).***

Soit A(0 ; 1 ; -1), B(2 ; 1 ; 0), C(-3 ; -1 ; 1), D(7 ; 3 ; -1) et E(6 ; 1 ; 2).

(*i*) Démontrer que les points A, B et C forment un plan. (C'est une question très fréquente au bac…).

(*ii*) Déterminer les coordonnées du vecteur : $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. Qu'en déduit-on concernant les points A, B, C et D ?

(*iii*) Soit F(18 ; 9 ; -6). Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.

(*iv*) Soit G(2 ; 7 ; 4). En raisonnant par l'absurde, montrer que les points A, B, C et G ne sont pas coplanaires.

i) Montrons que A, B, C ne st pas alignés (3 points non alignés forment un unique plan).

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}$.

$\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$ et $\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{0}{-2} = 0.$

$-\frac{2}{3} \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles,

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne st pas clnr, donc A, B et C ne sont pas alignés :

ils forment un unique plan (ABC).

ii) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}$ donc $-\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{AD}\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix}$ donc $-\vec{AD}\begin{pmatrix}-7\\-2\\0\end{pmatrix}$

Donc $2\vec{AB}-\vec{AC}-\vec{AD}=\vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Donc $2\vec{AB}-\vec{AC}-\vec{AD}=\vec{0}$.

On a : $\vec{AD}=2\vec{AB}-\vec{AC}$. $\vec{AD}$ est une CBL des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ avec $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non dmr, donc $\vec{AD}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ st coplanaires, et c ils ont la m origine, les 4 pts A, B, C et D st coplanaires.

iii) A, B et C sont non alignés, d'après q.1).

Ainsi A, B, C, F sont coplanaires ssi $\vec{AF}$ est une CBL des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

On cherche donc à prouver l'existence de 2 réels α et β tels que :

$\vec{AF}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}$

Par suite : M_1 : $\vec{AF}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}$

Or $\vec{AF}\begin{pmatrix}18\\8\\-5\end{pmatrix}$; $\alpha\vec{AB}\begin{pmatrix}2\alpha\\0\\\alpha\end{pmatrix}$; $\beta\vec{AC}\begin{pmatrix}-3\beta\\-2\beta\\2\beta\end{pmatrix}$ donc $\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AB}\begin{pmatrix}2\alpha-3\beta\\-2\beta\\\alpha+2\beta\end{pmatrix}$

$\vec{AF}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC} \iff \begin{cases}18=2\alpha-3\beta\\8=-2\beta\\-5=\alpha+2\beta\end{cases} \iff \begin{cases}\beta=\frac{8}{-2}=-4\\18=2\alpha-3\times(-4)\\-5=\alpha+2\times(-4)\end{cases}$

$\iff \begin{cases}\beta=-4\\2\alpha+12=18\\\alpha-8=-5\end{cases} \iff \begin{cases}\beta=-4\\\alpha=\frac{18-12}{2}=3\\\alpha=-5+8=3\end{cases}$

Ainsi : $\vec{AF}=3\vec{AB}-4\vec{AC}$

Donc A, B, C et F sont coplanaires.

M_2 en donnant direct $\vec{AF}=3\vec{AB}-4\vec{AC}$.

iv) A, B, C, G non coplanaires équivaut à dire que $\overrightarrow{AG}$ n'est pas CBL des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\overrightarrow{AG}$ est une CBL des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ càd supposons qu'il existe des réels x et y tels que : $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

Or $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}$ et $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2x-3y\\-2y\\x+2y\end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ équivaut à : $\begin{cases}2x-3y=2\\-2y=6\\x+2y=5\end{cases}$

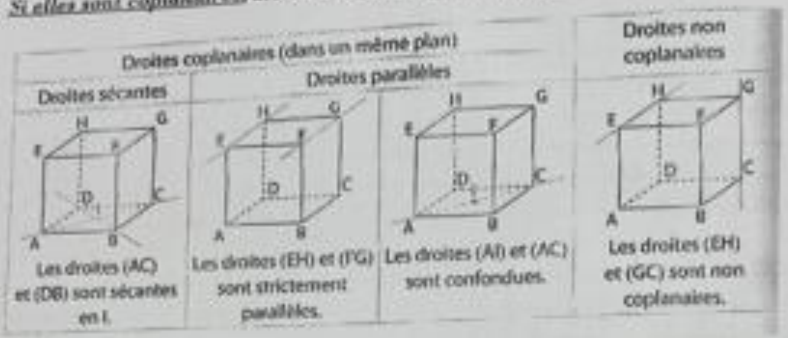
$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-3\times(-3)=2\\y=-3\\x+2\times(-3)=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-3\\2x+9=2\\x-6=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-3\\x=\frac{-7}{2}\\x=11\end{cases}$ Donc $-\frac{7}{2} = 11$: Absurde !

Donc $\overrightarrow{AG}$ n'est pas CBL des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, par suite A, B, C et G ne sont pas coplanaires.

IV- Position relative de deux droites de l'espace

Deux droites de l'espace sont <u>soit coplanaires</u>, c'est-à-dire qu'elles sont contenues dans un même plan, <u>soit non coplanaires</u>.

<u>Si elles sont coplanaires</u>, alors elles sont strictement parallèles, confondues ou sécantes.

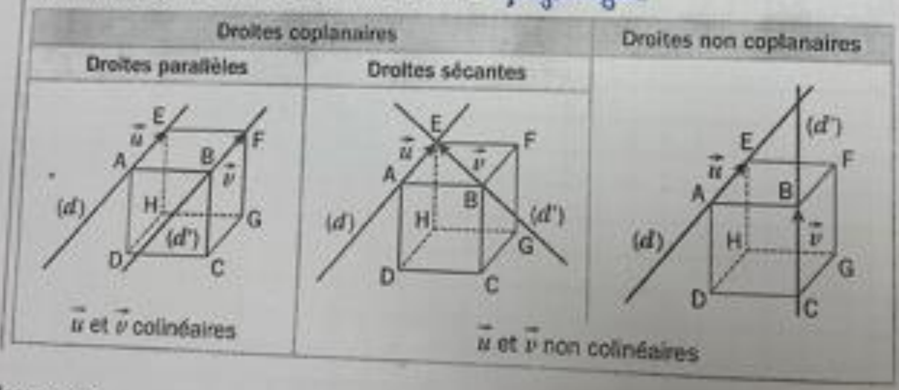


Déterminer la position relative de deux droites de l'espace signifie déterminer dans lequel des cas de figures précédents on se trouve.

Si on définit chacune des droites par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur, on a :

$d(A, \vec{u})$ et $d'(B, \vec{v})$ sont deux droites de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors (d) et (d') sont **parallèles**. (// ou confondues)
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors (d) et (d') sont **sécantes** lorsqu'elles ont un point en commun, **non coplanaires** sinon. çaglissefant



<u>*Remarques*</u>

Deux droites de l'espace sont confondues si et seulement si elles ont un point en commun <u>et</u> qu'elles sont parallèles.

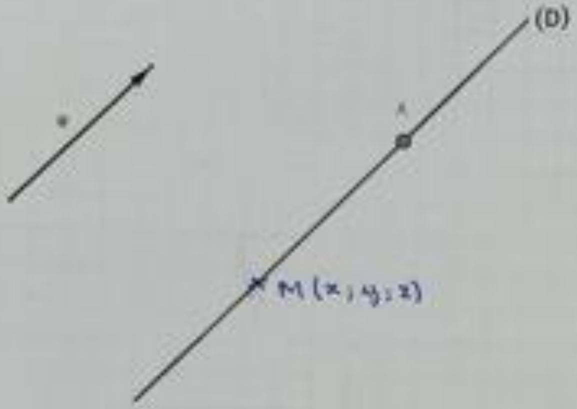
<u>*Attention*</u> : ☛ Dans l'espace, deux droites qui n'ont aucun point en commun ne sont pas nécessairement parallèles : elles peuvent être non coplanaires !!! ☛

V – Représentations paramétriques de droites de l'espace

***Attention** : on entre là dans le plus important du chapitre : vous verrez dans les exercices le nombre fréquent de question où l'on parle de représentation paramétrique de droites !!!!*

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un repère de l'espace.

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $(a\ ;\ b\ ;\ c) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$.



Où que soit situé le point M sur la droite $\mathscr{D}$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires : traduisons cela :

$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ st clnr .... $\Leftrightarrow$ Il existe un réel t ... tel que : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_{\overrightarrow{AM}} = k x_{\vec{u}} \\ y_{\overrightarrow{AM}} = k y_{\vec{u}} \\ z_{\overrightarrow{AM}} = t z_{\vec{u}} \end{cases}$

En effet : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$ et $t\vec{u}\begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases}$

En réécrivant : $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$ sous la forme : $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$, on obtient ce qu'on appellera une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

Définition et propriété

Le système (S) : $\boxed{\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}}$ est appelé <u>une</u> représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$, et le réel t est appelé le paramètre de cette représentation. On aurait pu utiliser pour le paramètre n'importe quelle lettre : t, t', s, u et v sont les plus fréquemment utilisées.

♥♥La droite ($\mathcal{D}$) passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

avec $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$ est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$. ♥♥

Ce système est appelé une représentation paramétrique (notée R.P.) ***de la droite*** ($\mathcal{D}$).

Il faut bien comprendre qu'à chaque valeur de t, on associe un point $M(x_A + at ; y_A + bt ; z_A + ct)$ et un seul, et que réciproquement, à chaque point M de ($\mathcal{D}$) correspond un unique réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

__Conséquence__ : toute droite admet une infinité de représentations paramétriques, pourquoi ?

car elle a une infinité de vecteurs directeurs

__Remarque__ : *contrairement au plan, une seule équation ne suffit pas pour définir une droite de l'espace.*

♥♥ Lorsqu'on a une représentation paramétrique d'une droite ($\mathcal{D}$) écrite sous la forme d'un système $\boxed{\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}}$, on peut affirmer, par *__simple lecture des coefficients du système__*, que ($\mathcal{D}$) passe par le point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et que $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de ($\mathcal{D}$). ♥♥

__Exemple 1__

On donne la représentation paramétrique d'une droite ($\mathcal{D}$) de l'espace : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a) Définir la droite ($\mathcal{D}$) de deux manières différentes.
b) Déterminer les coordonnées du point de paramètre -2 de ($\mathcal{D}$). Le point C(-10 ; -4 ; -16) appartient-il à ($\mathcal{D}$) ?

a) Une droite est définie soit par 2 points distincts.
Soit par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur de la droite

Par lecture de la RP donnée.

$\mathcal{D}$ est la droite passant par $A(0 ; 1 ; -1)$ et dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

De m, $\mathcal{D}$ est la droite passant par $A(0 ; 1 ; -1)$ et par $B(4 ; 3 ; 5)$

$\hookrightarrow t = 2$

b) Si $t = -2$: $\begin{cases} x = 2 \times (-2) = -4 \\ y = 1 - 2 = -1 \\ z = -1 + 3 \times (-2) = -7 \end{cases}$

Donc $E(-4 ; -1 ; -7)$ est le point de la droite ($\mathcal{D}$) de paramètre $t = -2$.

$C(-10\,;-4\,;-16)$

$C \in (\mathcal{D}) \iff \exists t \in \mathbb{R}$ tq : $\begin{cases} x_C = 2t \\ y_C = 1+t \\ z_C = -1+3t \end{cases}$

$\iff \exists t \in \mathbb{R}$ tq : $\begin{cases} -10 = 2t \\ -4 = 1+t \\ -16 = -1+3t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t = \dfrac{-10}{2} = -5 \\ t = -4-1 = -5 \\ t = \dfrac{-16+1}{3} = \dfrac{-15}{3} = -5 \end{cases}$ Système compatible.

Réponse : $C \in (\mathcal{D})$ et C est le point de paramètres -5 de cette droite.

Exemple 2

1) Donner deux représentations paramétriques de la droite ($\mathcal{D}$), passant par A(1 ; 0 ; -2) et par B(2 ; 1 ; -1).

2) Soit (Δ) la droite admettant pour R.P. : $\begin{cases} x=-1+t \\ y=5-2t \\ z=3-t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ ') passant par A et parallèle à (Δ).

1) $(\mathcal{D}) = (AB)$

$A(1;0;-2)$ et $B(2;1;-1)$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige $(\mathcal{D})$.

Donc une RP de $(\mathcal{D})$ est : $\begin{cases} x = 1+t = t+1 \\ y = 0+t = t \\ z = -2+t = t-2 \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$

Une autre RP de $(\mathcal{D})$: $\begin{cases} x = 2+5t' \\ y = 1+5t' \\ z = -1+5t' \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$

↳ $(\mathcal{D})$ passe par $B(2;1;-1)$ et $5\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$ dirige $(\mathcal{D})$.

2) (Δ) a pour RP $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 5-2t \\ z = 3-t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

$A \in (\Delta')$ et $(\Delta) // (\Delta')$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ dirige (Δ). Or $(\Delta) // (\Delta')$, donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ dirige (Δ') et $A(1;0;-2) \in (\Delta')$.

Donc une RP de (Δ') est : $\begin{cases} x = 1+t' = t'+1 \\ y = -2t' = -2t' \\ z = -2-t' = -t'-2 \end{cases}$ où $t'\in\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit la droite $(\mathcal{D})$, dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 3t+1 \\ z = t+1 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

a) Soient B(1 ; 6 ; 0) et C(3 ; 0 ; -2). $(\mathcal{D})$ et (BC) sont-elles parallèles ?

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (BC).

c) Soit E(2 ; -3 ; 1) et F(0 ; 3 ; 3). Démontrer que $(\mathcal{D})$ et (EF) sont <u>strictement</u> parallèles.

a) $(\mathcal{D})$ a pour RP $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 3t+1 \\ z = t+1 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

$(\mathcal{D})$ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ dirige (BC).

Donc $\vec{BC} = -2\vec{u}$, donc $\vec{BC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Donc $(\mathcal{D}) // (BC)$.

b) Une RP de (BC) est : $\begin{cases} x = 1 - l \\ y = 6 + 3l \\ z = 0 + l \end{cases}$ où $l \in \mathbb{R}$

c) E(2 ; -3 ; 1) et F(0 ; 3 ; 3)

$\vec{EF}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ dirige (EF) mais $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (EF)

Or $\vec{v} = \vec{u}$ où $\vec{u}$ dirige $(\mathcal{D})$.

Ainsi $(\mathcal{D})$ et (EF) sont parallèles.

Pour prouver que $(\mathcal{D})$ et (EF) st strictement //, on prend un point F(0;3;3) appartient à (EF), et on montre que $F \notin (\mathcal{D})$:

$F(0;3;3) \in (\mathcal{D}) \iff \exists t \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x_F = -t+1 \\ y_F = 3t+1 \\ z_F = t+1 \end{cases}$

$\iff \exists t \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} 0 = -t+1 \\ 3 = 3t+1 \\ 3 = t+1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{2}{3} \\ t = 2 \end{cases}$

Système incompatible donc $F \notin (\mathcal{D})$ donc $(\mathcal{D})$ et (EF) st strict. //.

Exercice 7

1) Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un repère de l'espace.

(d) et (δ) les droites ayant pour représentation paramétrique respective :

$$(d) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = 3-3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (\delta) : \begin{cases} x = s \\ y = -3-3s \\ z = 1-s \end{cases} \text{ avec } s \in \mathbb{R}.$$

Etudier avec soin la position relative de (d) et (δ).

2) Même question pour les droites (D) et (Δ) sachant que (D) passe par le point A(2 ; -1 ; 1) et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et que (Δ) admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = s+1 \\ y = 2s-3 \\ z = -s+2 \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

1) Par lecture des RP données :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ dirige (d).

$\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (δ).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colin sinon $-3 = -1$!

Donc (d) et (δ) ne sont pas parallèles.

Ainsi (d) et (δ) sont soit sécantes, soit non coplanaires.

→ Etudions l'intersec° de (d) et (δ).

Si card $((d) \cap (\delta)) = 0$ alors (d) et (δ) seront non coplanaires.

Si card $((d) \cap (\delta)) = 1$ alors (d) et (δ) seront sécantes.

Soit $M(x ; y ; z)$:

$$M(x;y;z) \in (d) \cap (\delta) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R} \text{ tq} : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = 3-3t \\ x = s \\ y = -3-3s \\ z = 1-s \end{cases}$$

$$\exists t \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R} \text{ tq} : \begin{cases} x = 1+t = s \\ y = 2-3t = -3-3s \\ z = 3-3t = 1-s \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} 1+t=1 \\ 2-3t=-3-3s \\ 3-3t=1-s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=t+1 \\ 2-3t=-3-3(t+1) \\ 3-3t=1-(t+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=t+1 \\ 2-3t=-3-3t-3 \\ 3-3t=-t \end{cases}$

$\begin{cases} s=t+1 \\ 2=-6 \end{cases}$: absurde !

Donc (d) et (S) n'ont aucun point en commun.

Or (d) et (S) ne st pas //.

(d) et (S) ne sont pas coplanaires.

2) $(\mathcal{D})$ passe par $A(2;-1;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ dirige $(\mathcal{D})$.

Par lecture de RP de (Δ), $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ dirige (Δ).

$\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{w}}}=\frac{3}{1}=3$ et $\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{w}}}=\frac{-1}{2}$.

Or $3 \neq -\frac{1}{2}$ donc coordonnées non prop., donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ non colin., donc $(\mathcal{D})$ et (Δ) ne st pas parallèles.

• Étudions l'intersec° de (d) et (Δ) :

Une RP de $(\mathcal{D})$ est : $\begin{cases} x=3t+2 \\ y=-t-1 \\ z=t+1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$M(x;y;z) \in (\mathcal{D})\cap(\Delta) \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}, \exists t \in \mathbb{R}$ tq : $\begin{cases} x=3t+2=s+1 \\ y=-t-1=2s-3 \\ z=t+1=-s+2 \end{cases}$

Ainsi : $\begin{cases} s=3t+1 \\ -t-1=2(3t+1)-3 \\ t+1=-(3t+1)+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=3t+1 \\ -t-1=6t+2-3 \\ t+1=-3t-1+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=3t+1 \\ 7t=0 \\ 4t=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} s=3\times 0+1=1 \\ t=0 \\ t=0 \end{cases}$ Système compatible.

$x=3\times 0+2=2$
$y=-0-1=-1$
$z=0+1=1$

Donc $(\mathcal{D})$ et (Δ) sont sécantes en $M(2;-1;1)$.

Exercice 8

Déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse :

Les droites (d) et (d') ont pour représentation paramétrique respective :

$$(d) : \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+3t \\ z = 3-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{et } (d') : \begin{cases} x = -6-7t' \\ y = -25-21t' \\ z = 19+14t' \end{cases} \text{ avec } t' \in \mathbb{R}.$$

Affirmation : (d) et (d') sont distinctes.

Grâce aux RP données :

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ dirige (d) et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-7\\-21\\14\end{pmatrix}$ dirige (d').

Ainsi, $\vec{u'} = -7\vec{u}$, donc (d) et (d') sont parallèles.

Prenons $A(2;-1;3)$. $A \in (d)$ (lecture de RP).

Le point A appartient-il à (d) ?

$A(2;-1;3) \in (d') \iff \exists t' \in \mathbb{R}$ tq : $\begin{cases} 2 = -6-7t' \\ -1 = -25-21t' \\ 3 = 19+14t' \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} t' = \frac{-8}{7} \\ t' = \frac{-24}{21} = \frac{-8}{7} \\ t' = \frac{-16}{14} = \frac{-8}{7} \end{cases}$$

Système compatible.

Donc $A \in (d)$.

Donc $\hat{c}$ (d) // (d'), il résulte que (d) et (d') sont confondues

À ce titre elles ne sont pas distinctes.

L'affirmation est donc fausse.