Chapitre VIII Vecteurs, droites et plans de l'espace

I – Vecteurs de l'espace

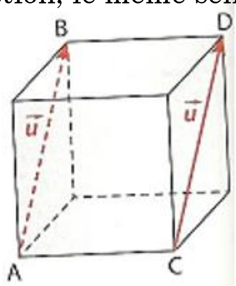
1.1 Définitions et règles de calcul

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace.

1. A tout couple de points (A, B) de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ définit comme suit :

- Lorsque A et B sont distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a :
  - Pour direction celle de la droite (AB).
  - Pour sens celui de A vers B.
  - Pour longueur (synonyme norme) la distance AB. On note : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
- Lorsque A et B sont confondus, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul noté $\vec{0}$.

On dit que deux vecteurs non nuls sont égaux lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même norme. On note : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (voir figure ci-contre).



2. Lorsque quatre points A, B, C, D ne sont pas alignés on a :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **équivaut à dire que le quadrilatère ……….. est un parallélogramme.**

On appelle ***représentant d'un vecteur*** $\vec{u}$ donné ***tout vecteur égal à*** $\vec{u}$.

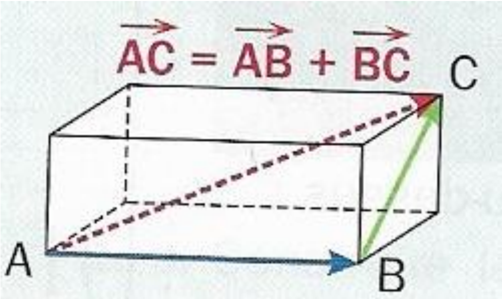
3. Pour tout point A de l'espace et tout vecteur $\vec{u}$**, il existe un unique point B tel que :** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

4. Les règles de calculs sur les vecteurs sont les mêmes qu'avec les vecteurs du plan.

Toujours faire un croquis lorsqu'on parle de parallélogramme : attention à l'erreur classique : "ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$" : c'est faux : regardez-ci-dessous, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas égaux mais opposés car pas le même sens. Au passage, l'opposé du vecteur $\overrightarrow{CD}$ c'est $\overrightarrow{DC}$ avec pour notation : $-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$

La relation de *Chasles* dit que : pour tout point A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Illustration :

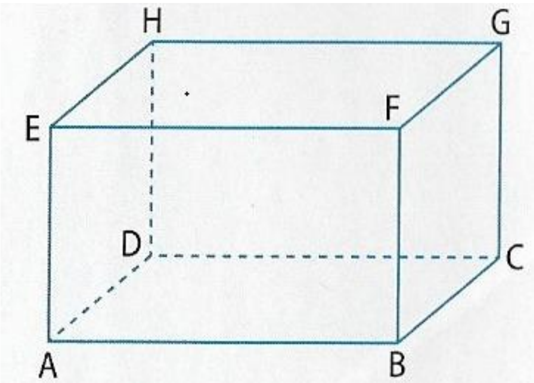


Elle est applicable à plus de deux vecteurs. Par exemple : $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KL} = ….$

Notons que la relation de *Chasles* donne un moyen simple d'additionner deux vecteurs de l'espace. Dans le cas fréquent où l'extrémité du premier vecteur n'est pas identique à l'origine du second vecteur, on peut toujours, en utilisant un représentant d'un des vecteurs, se ramener à utiliser la relation de *Chasles*.

Exemple

A l'aide des points de la figure ci-dessous qui est un pavé droit (=parallélépipède rectangle), donner :



i) un représentant du vecteur : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CG}$

ii) Le représentant d'origine E du vecteur $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA}$

Enfin dire qu'un point D est l'image d'un point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ signifie que :

Illustration :

Quelle est l'image du point H par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$ sur la figure ci-dessus ?

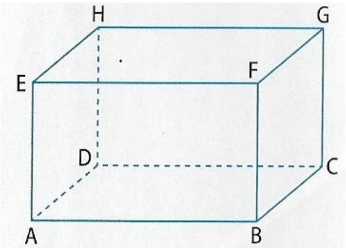
1.2 *Vecteurs colinéaires*

Rappel

Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est tel que :
- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction ;
- si $k > 0$, alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens, sinon, ils sont de sens contraire ;
- $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

On rappelle que $|k| = \left\{ \right.$

Illustration :



Construire ci-dessus les point R, S et T définis par : $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CS} = -2\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}$.

Définition ♥

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont *colinéaires* équivaut à dire *qu'ils ont la même direction*, autrement dit :
♥ ***$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$.*** ♥

On convient que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace.

Illustration :

♥♥ Propriété phare ♥♥

A, B, C et D sont quatre points distincts de l'espace.

1) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si …………………………………

2) Les points A, B et C sont alignés équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Attention, cette propriété sera d'un ***usage fréquent*** dans ce chapitre, surtout quand on disposera des coordonnées des points et des vecteurs.

Point 2) : prenez le temps de bien le comprendre : les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires équivaut à dire que les droites (AB) et (AC) sont parallèles : or deux droites parallèles qui ont un point en commun, ici A, sont confondues : les trois points A, B et C sont sur la même droite et donc alignés !!!

Exercice 1

1) Construire un tétraèdre ABCD, puis construire les points M et N définis par :
$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.

2) Démontrer que les droites (MC) et (AN) sont parallèles.

1.3 *Combinaison linéaire de vecteurs*

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

♥♥Un vecteur $\vec{w}$ est appelé ***une combinaison linéaire des vecteurs*** $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ s'il existe des réels a et b tels que : ♥ $\vec{w}$ = ……………..♥

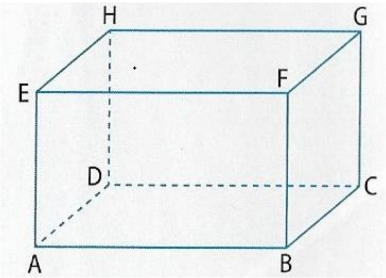
Exemple : la relation : $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$ permet de dire que le vecteur $\overrightarrow{DR}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

Bien évidemment, cette définition se généralise à une combinaison linéaire de 3 vecteurs ou plus.

Cette année, on utilisera fréquemment des combinaisons linéaires de trois vecteurs :

Reprenons le pavé droit ci-dessous :

Ecrire $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.



Exercice 2

SABCD est une pyramide de sommet S et dont la base est un carré ABCD de centre I.

a) Faire une figure.

b) Exprimer $\overrightarrow{SI}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SC}$.

c) En déduire que $\overrightarrow{SD}$ est une combinaison linéaire (à préciser) des vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$.

✂---

II – Droites et plan de l'espace

Tout d'abord, intuitivement, un plan est une surface "plate" illimitée. Par exemple le plan formé par le tableau est un exemple de plan. Il se représente dans l'espace par un parallélogramme lorsqu'il est regardé non frontalement, et par un rectangle sinon.

Exemples : Sur la figure précédente, le plan contenant le rectangle ABCD est représenté par un parallélogramme (car non vu non frontalement), tandis que le plan contenant le rectangle ABFE est représenté par un rectangle car vu frontalement.

1) Règles d'incidence

Quelques axiomes utiles (appelés règles d'incidence) et utilisés en permanence durant tout le chapitre…

1) Par *deux points distincts* de l'espace, il passe une *unique* droite.

***Illustration* :**

***2) Trois points non alignés* de l'espace définissent un *unique* plan.**

Notation et illustration* : *si* A, B *et* C *ne sont pas alignés, le plan passant par les points* A, B *et* C *est noté* : (ABC)*. Remarque* : (BCA) *désigne le même plan que* (ABC)*!

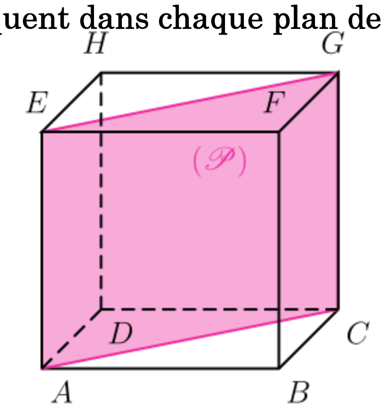
3) Si deux points A et B sont distincts et qu'ils appartiennent à un même plan ($\mathscr{P}$), alors la droite (AB) est incluse dans ce plan ($\mathscr{P}$).

***Illustration* :**

Les propriétés connues de géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

Exemples

Dans le cube ABCDEFGH ci-contre :



a) Donner 4 noms différents du plan ($\mathscr{P}$) ci-contre.

b) Expliquer pourquoi la droite qui passe par A et par le point O intersection des droites (EC) et (AG) est contenue dans le plan ($\mathscr{P}$).

c) Démontrer que (EG) et (AC) sont parallèles.

✂--

2) Droites de l'espace

***Propriété* (caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace)**

Soient A et B deux points distincts de l'espace noté $\mathscr{E}$.

La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Traduction mathématique de la phrase précédente : le $\exists$ signifie : il existe (au moins un).

$(AB) = \{M \in \mathscr{E} / \exists\, t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}\}$.

Cette caractérisation d'une droite nous servira pour en donner une représentation paramétrique des droites de l'espace.

__Preuve__ : Comprenez bien qu'où que soit placé le point M sur la droite (AB), les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires !!!

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires signifie, par définition même de deux vecteurs colinéaires, qu'il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$!!

__Remarques importantes__

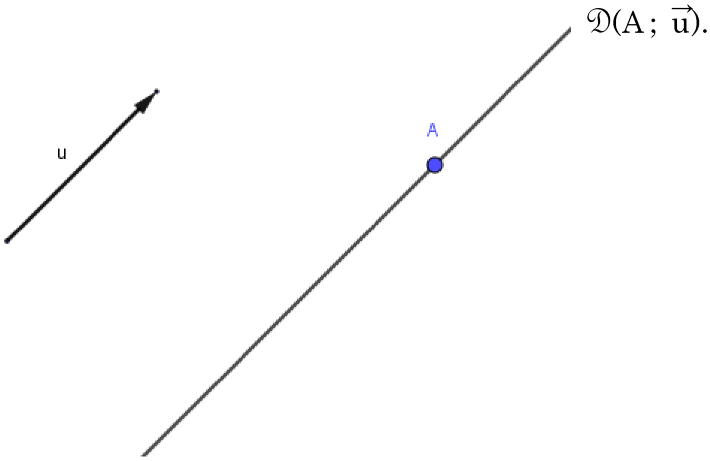
1. $\overrightarrow{AB}$ est appelé *__un__* vecteur directeur de la droite (AB). On dit encore que la droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ est un autre vecteur directeur de la droite (AB), tout comme $1{,}84\overrightarrow{AB}$, donc évitez de dire ~~le~~ vecteur directeur de la droite (AB), il y a une différence fondamentale entre un article indéfini (non-unicité) et un article défini (unicité) !!

Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs : si $\vec{u}$ désigne l'un d'eux, alors, pour tout réel k non nul, $k\vec{u}$ est également un autre vecteur directeur de cette droite !

2. On retiendra que comme dans le plan, une droite peut être définie par la donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$ non nul, appelé vecteur directeur de la droite.

__Illustration__ : La droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ est parfois notée $\mathcal{D}(A\,;\,\vec{u})$.



3. ♥**Deux droites de l'espace sont *__parallèles__* si et seulement si elles ont des *vecteurs directeurs __colinéaires__*.**♥

💣***Capital pour les exercices.***

__Illustration__ :

3 – Vecteurs et plans de l'espace

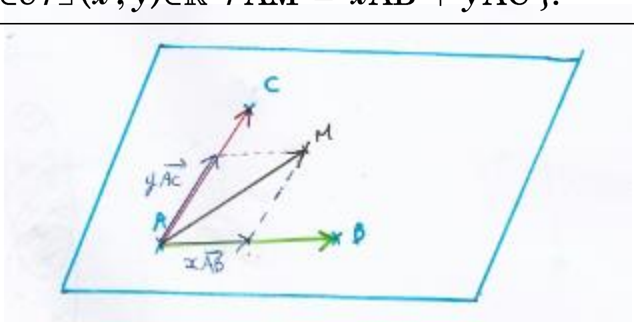
***Théorème* (caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace).**

Soit A, B et C ***trois points non alignés*** de l'espace noté $\mathcal{E}$.

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire tels que : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec x et y réels.

$$(ABC) = \{M \in \mathcal{E} \,/\, \exists (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\}.$$

***Illustration* :**



***Preuve* :** conséquence directe du fait que A, B et C ne soient pas alignés, donc le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan, et d'après le cours de première, tout vecteur $\overrightarrow{AM}$ se décompose de façon unique suivant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Remarques fondamentales

Dans le cadre du théorème précédent, on dit que les vecteurs **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC).**

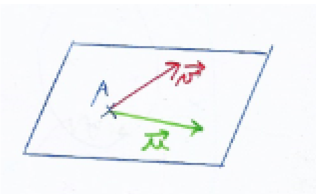
Un plan possède une infinité de couples de vecteurs directeurs. Pourquoi ?

Car si $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan, il en est de même pour le couple formé par :

On peut définir un plan $\mathcal{P}$ par la donnée d'un point A et de deux vecteurs **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.**

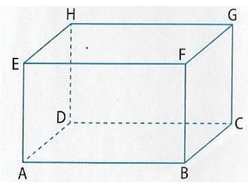
On notera : $\mathcal{P} = (A\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ un tel plan. **♥Un *couple de vecteurs non colinéaires* du plan $\mathcal{P}$ est appelé une base du plan $\mathcal{P}$.♥**

Illustration : $\mathcal{P}$



Exemple

Dans le pavé droit ci-dessous, définir le plan (EHD) par la donnée d'un point et d'un couple de vecteurs non colinéaires. Citer trois points appartenant au plan $(G\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$.



__Définition (points coplanaires)__

Des points de l'espace sont dits coplanaires s'il existe un plan qui contient tous ces points.

Dans l'exemple précédent, les points A, B, C et D sont coplanaires car contenus dans le plan (ABC).

Trois points de l'espace sont toujours coplanaires.

S'il n'existe aucun plan contenant 4 points donnés (ou plus), on dit que ces points ne sont pas coplanaires !

C'est par exemple le cas lorsqu'on a un tétraèdre ABCD : les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires !

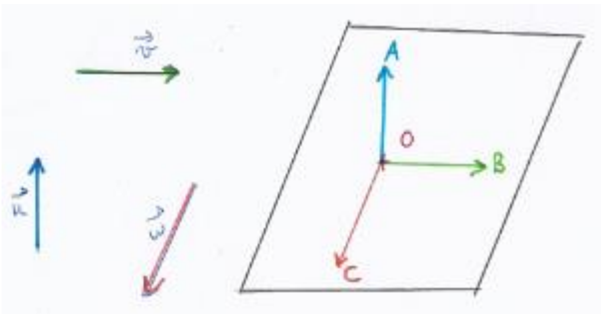
Enfin, comme nous le verrons au paragraphe position relative de droites et de plans, deux droites de l'espace parallèles sont toujours coplanaires.

__Définition__ (vecteurs coplanaires)

Dire que ***trois vecteurs de l'espace*** sont ***coplanaires*** signifie que lorsqu'on choisit un point O quelconque de l'espace, les ***extrémités des représentants*** de ces vecteurs d'origine O sont *coplanaires* avec O.

Donc, dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires équivaut à dire que les quatre points O, A, B et C sont coplanaires, où O est un point quelconque de l'espace, et A, B et C étant les points définis par : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

__Illustration__ :

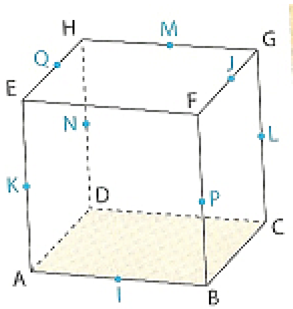


Attention à ne pas confondre vecteurs coplanaires et vecteurs colinéaires : ça n'a rien à voir !!!

__Exemple__ : Dans le cube ci-contre *:*

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont trois vecteurs coplanaires.

Par contre, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires !



Théorème ***(permet de démontrer que 3 vecteurs sont coplanaires, utile pour les exercices)***

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des nombres réels x et y tels que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Preuve : Fixons un point O de l'espace. Soit A, B et C les points définis par : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$; $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. Vu que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les points O, A et B ne sont pas alignés et définissent donc le plan (OAB).

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si O, A, B et C sont coplanaires, ce qui équivaut à dire que le point C appartient au plan (OAB).

D'après le théorème précédent de caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace, C appartient au plan (OAB) équivaut donc à dire qu'il existe des réels x et y tels que : $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$.

Ainsi, $\boxed{\vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels } x \text{ et } y \text{ tels que : } \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}}$.

Conséquence importante

Dire que quatre points A, B, C et D de l'espace sont coplanaires équivaut à dire que les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Utile en exercice, *cf.* ci-après.

Exercice 3

Soit ABCD un tétraèdre, et M le point tel que : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que les points A, B, C et M sont coplanaires.

✂---

III– Repères de l'espace

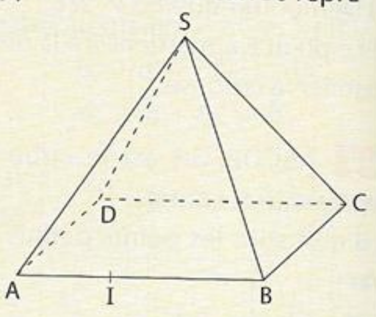
Définition

On appelle ***base de l'espace*** tout ***triplet de vecteurs non coplanaires***.

Dire que $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ est une base de l'espace signifie donc que les trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.

Exemple

SABCD est la pyramide à base carrée représentée ci-contre.
I est un point de [AB] distinct des points A et B.
Dire dans chaque cas si le triplet de vecteurs est une base de l'espace.



a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})$ **b)** $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SI})$

__Définition__

On appelle ***repère de l'espace***, la donnée d'**un point O** (appelé l'origine du repère) __et__ **d'une base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ de l'espace.**

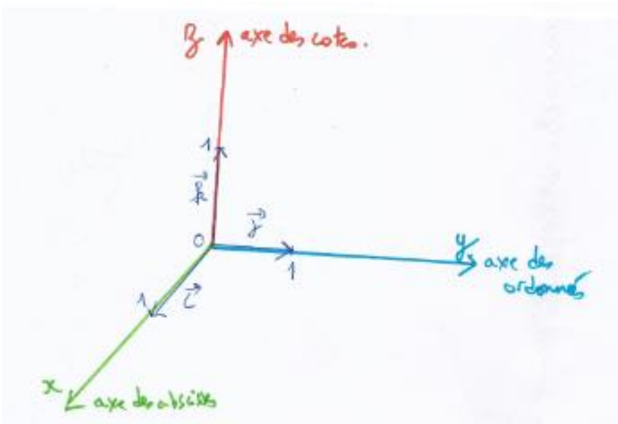
On note $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un tel repère de l'espace.

L'axe** $(O, \vec{i})$**, c'est-à-dire la droite passant par le point** O **et dirigée par le vecteur** $\vec{i}$**, est appelé l'axe des abscisses du repère.

L'axe** $(O, \vec{j})$ **est appelé l'axe de ordonnées.

L'axe** $(O, \vec{k})$ **est appelé l'axe des cotes.

__Illustration__ :



Attention, l'ordre des vecteurs de la base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ est fondamental ! Changer l'ordre de ces vecteurs revient à changer de repère !!

Bien évidemment, on peut prolonger chaque axe de part et d'autre de O, on ne le fait pas pour ne pas trop surcharger la représentation spatiale.

La propriété suivante généralise celle que vous utilisez dans le plan en géométrie repérée :

__Propriété__

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un repère de l'espace.

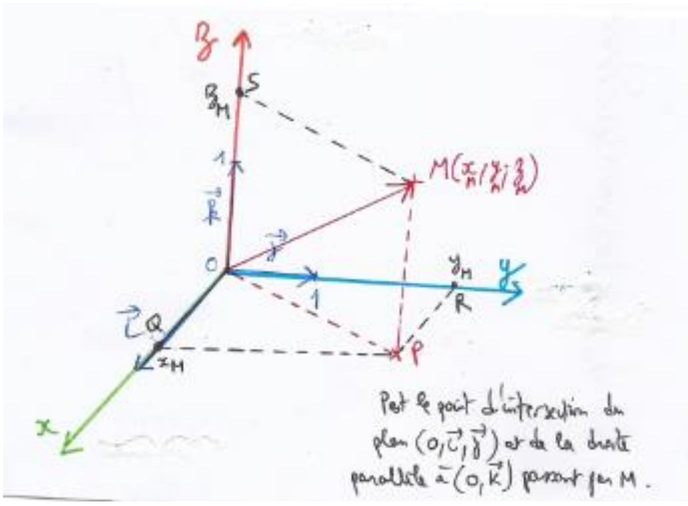
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de réels tels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont les __*coordonnées du point* M *dans le repère*__ $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

x est appelée l'abscisse du point M, y l'ordonnée du point M et z la cote du point M.

On notera : $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ les coordonnées du point M dans ce repère.

__Illustration fondamentale__ :



Pour lire graphiquement les coordonnées d'un point M de l'espace dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$, on procède comme suit :

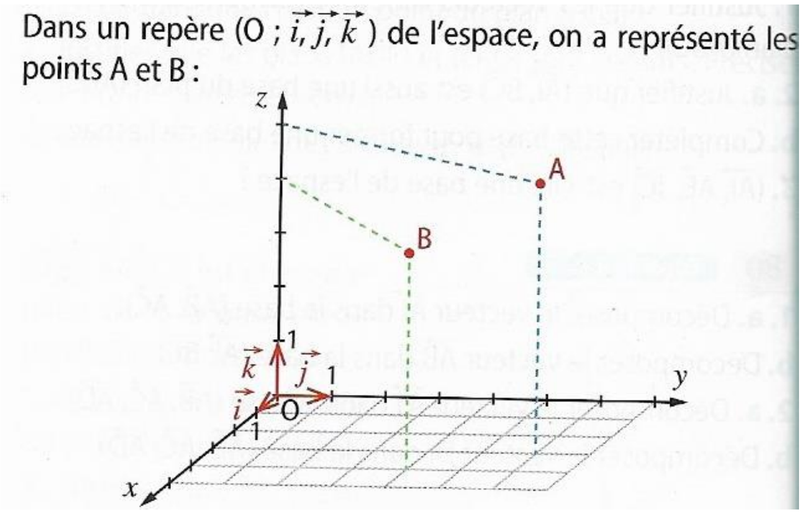
On trace la parallèle à $(O\,;\vec{k})$ passant par le point M : cette dernière traverse le plan $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ en le point nommé P.

Depuis P on trace la droite parallèle à l'axe des ordonnées qui coupe l'axe des abscisses en le point Q dont l'abscisse est x_M.

On trace la parallèle à l'axe des abscisses qui coupe l'axe des ordonnées en le point R qui a pour ordonnée y_M.

Enfin, la parallèle à (OP) passant par le point M coupe l'axe des ordonnées en le point S de cote z_M.

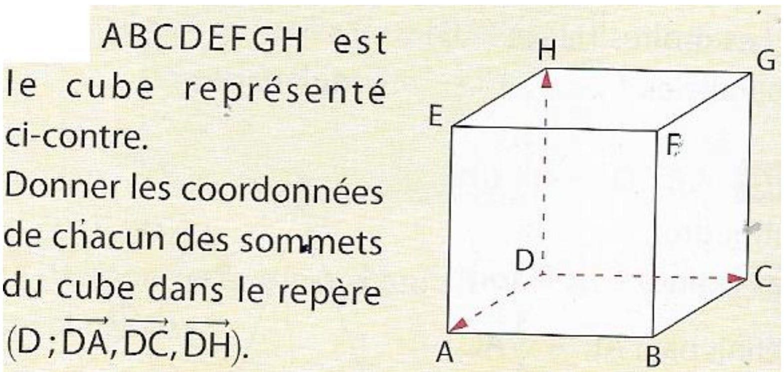
Exemple


Dans un repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on a représenté les points A et B :

Lire graphiquement les coordonnées des points A et B.

Un ***point de l'espace est donc repéré*** dans un repère de l'espace ***par trois nombres.*** (Cela justifie la terminologie *"espace de dimension* 3").

Exercice 4


ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
Donner les coordonnées de chacun des sommets du cube dans le repère $(D\,;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.

On sait que pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

On définit les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ comme celles du point M dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$***, il existe un unique triplet de réels*** $(x\ ;y\ ;z)$ ***tel que :*** $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

Cela traduit le fait que tout vecteur de l'espace peut se décomposer suivant trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

On notera $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

La ***notation en colonne*** des ***coordonnées d'un vecteur*** est rigoureuse, et permet lorsqu'on débute, de distinguer les coordonnées d'un vecteur de celles d'un point. ***Pensez-y*** !

Point crucial : Si le repère s'appelle $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$, alors on a : $\boxed{\vec{i}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\\\dots\end{pmatrix}\quad\vec{j}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\\\dots\end{pmatrix}\quad\vec{k}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\\\dots\end{pmatrix}}$, il faut savoir instantanément donner les coordonnées des vecteurs unitaires formant la base de votre repère.

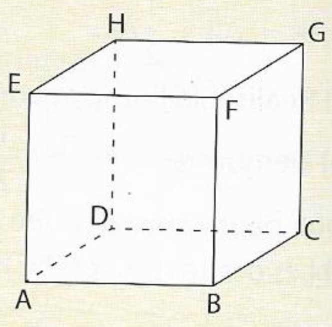
Définition

Décomposer un vecteur $\vec{u}$ dans une base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ c'est écrire le vecteur $\vec{u}$ sous la forme :

$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, où x, y et z sont des réels respectivement appelés : première coordonnée (ou abscisse), seconde coordonnée (ou ordonnée), troisième coordonnée (ou cote) du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

Exercice 5

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
Dans chaque cas, donner la décomposition du vecteur dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



a) $\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AG}$ **c)** $\overrightarrow{GB}$ **d)** $\overrightarrow{DF}$

♥♥♥♥Formulaire récapitulatif relatif aux coordonnées ♥♥♥♥

Tous les résultats de la géométrie plane connus concernant les coordonnées s'étendent à l'espace en ajoutant une troisième coordonnée.

Elles sont d'un usage fréquent dans tous les exercices de bac, alors mémorisez-les une fois pour toutes !!!!!

1. Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un repère de l'espace, et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans ce repère.

Alors : $\boxed{\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}}$ et pour tout réel k, $\boxed{k\vec{u}\begin{pmatrix} \ldots. \\ \ldots. \\ \ldots. \end{pmatrix}}$.

✍Pour additionner deux vecteurs, on additionne donc respectivement les coordonnées de même nom entre elles, et multiplier un vecteur par un réel k revient à multiplier par k <u>chacune</u> de ses coordonnées.

2. ♥***Deux vecteurs*** sont ***égaux*** si et seulement si : ***ils ont les mêmes coordonnées.*** ♥

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$

3. ♥**Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *<u>colinéaires</u>* si et seulement si *<u>leurs coordonnées sont proportionnelles</u>*.** ♥

4. Soit A et B deux points de l'espace.

Si dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$, on a : $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$, alors :

*) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : ♥♥♥ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$ ♥♥♥ ***(dans tous les exercices de bac).***

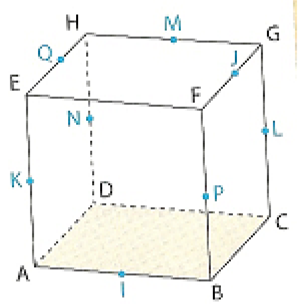
☞Extrémité moins origine comme dit maladroitement le dog, en rappelant que l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point A et son extrémité le point B !!!

**) Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées : ♥♥ $I(\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots\ldots\ldots)$ ♥♥

Essayez de ne pas confondre coordonnées du milieu et coordonnées d'un vecteur.
Chaque année, c'est une erreur fréquente qui montre une grosse capacité de mémorisation….

Exemple

I, J, K, L, M, N, P et Q sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [FG], [AE], [CG], [HG], [HD], [BF] et [EH].



Dans le repère de l'espace $(D\ ;\ \overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{DH})$ déterminer :

i) Les coordonnées des points I et Q.

ii) Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{DG}$.

iii) Les coordonnées du centre Ω de la face BCGF.

iv) Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{BH} - 3\overrightarrow{GD}$

✂---

Exercices de base fondamentaux (à maîtriser)

On se place dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ,\vec{k})$ *de l'espace.*

Exercice α (**déterminer si trois points sont alignés ou pas**).

Les points A(5 ; 2 ; 3), B(-1 ; 3 ; 2) et C(-7 ; 4 ; 1) sont-ils alignés ? Même question avec les points *A*, B et D où D(1 ; 2 ; 3).

✂---

Exercice β (prouver que deux droites sont parallèles ; prouver que deux droites sont sécantes).

Soit A(2 ; 1 ; 5), B(4 ; 2 ; 4), C(3 ; 3 ; 5) et D(0 ; 3 ; 7).

(*i*) Montrer que (AD) et (BC) sont parallèles.

(*ii*) Montrer que (AB) et (CD) sont sécantes.

✂---

Exercice γ (prouver que trois points forment un plan, montrer que 4 points sont coplanaires ou non coplanaires).

Soit A(0 ; 1 ; -1), B(2 ; 1 ; 0), C(-3 ; -1 ; 1) , D(7 ; 3 ; -1) et E(6 ; 1 ; 2).

(*i*) Démontrer que les points A, B et C forment un plan. (C'est une question très fréquente au bac…).

(*ii*) Déterminer les coordonnées du vecteur : $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. Qu'en déduit-on concernant les points A, B, C et D ?

(*iii*) Soit F(18 ; 9 ; -6). Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.

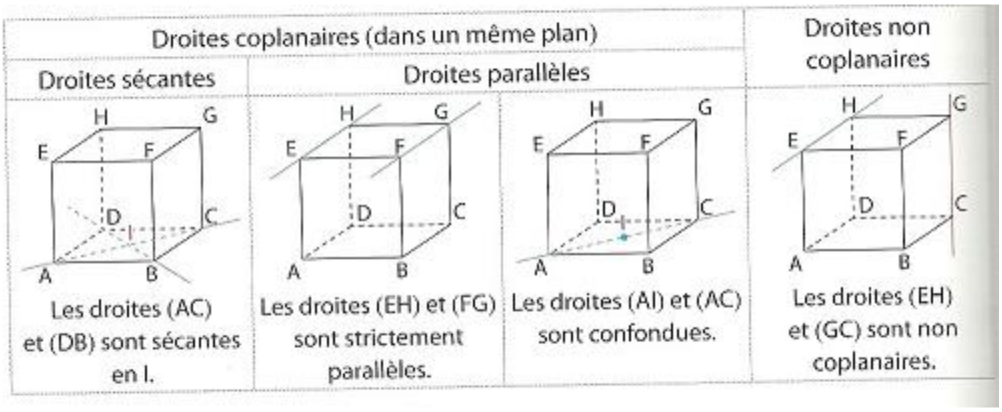
(*iv*) Soit G(2 ; 7 ; 4). En raisonnant par l'absurde, montrer que les points A, B, C et G ne sont pas coplanaires.

✂---

IV-Position relative de deux droites de l'espace

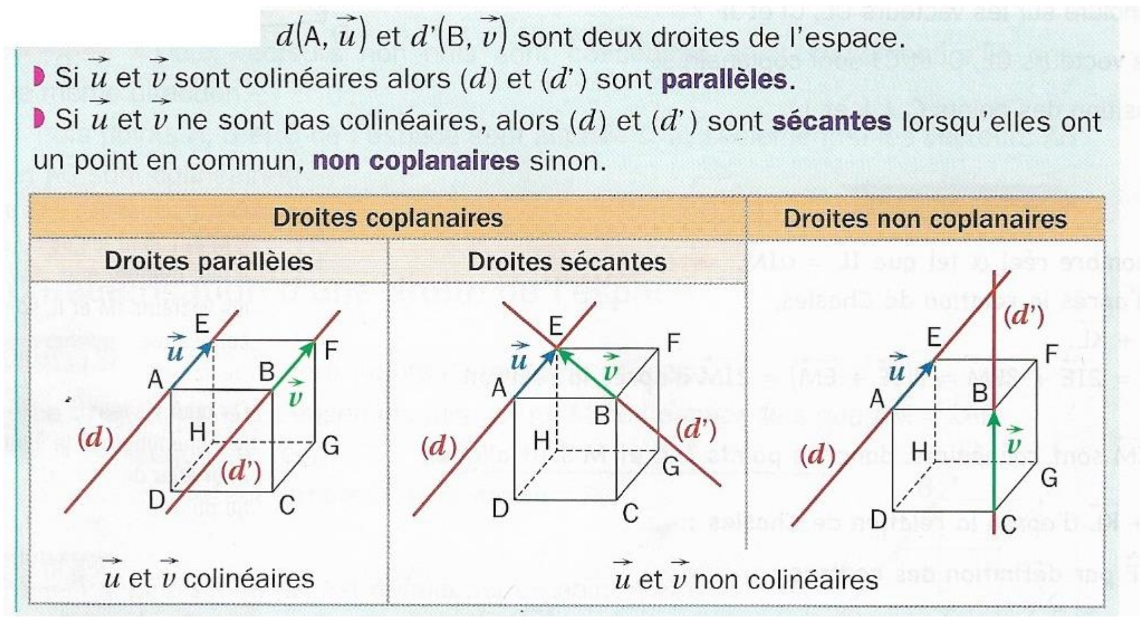
Deux droites de l'espace sont <u>soit coplanaires</u>, c'est-à-dire qu'elles sont contenues dans un même plan, <u>soit non coplanaires</u>.

<u>Si elles sont coplanaires</u>, alors elles sont strictement parallèles, confondues ou sécantes.



Déterminer la position relative de deux droites de l'espace signifie déterminer dans lequel des cas de figures précédents on se trouve.

Si on définit chacune des droites par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur, on a :



<u>Remarques</u>

Deux droites de l'espace sont confondues si et seulement si elles ont un point en commun <u>et</u> qu'elles sont parallèles.

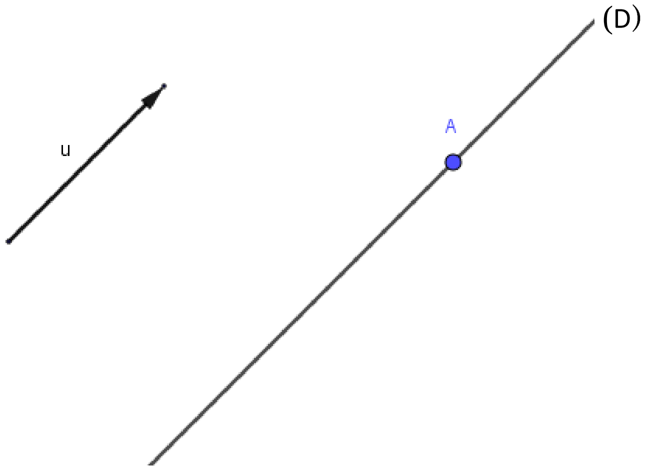
<u>Attention</u> : Dans l'espace, deux droites qui n'ont aucun point en commun ne sont pas nécessairement parallèles : elles peuvent être non coplanaires !!!

V – Représentations paramétriques de droites de l'espace

***Attention* : on entre là dans le plus important du chapitre : vous verrez dans les exercices le nombre fréquent de question où l'on parle de représentation paramétrique de droites !!!!**

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un repère de l'espace.

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $(a\ ;\ b\ ;\ c) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$.



Où que soit situé le point M sur la droite $\mathcal{D}$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires : traduisons cela :

$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow$ …………………………… $\Leftrightarrow$ …………………………… $\Leftrightarrow$

En effet :

En réécrivant : $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$ sous la forme : $\begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$, on obtient ce qu'on appellera une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

Définition et propriété

Le système (S) : $\boxed{\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}}$ est appelé ***une*** représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, et le réel t est appelé le paramètre de cette représentation. On aurait pu utiliser pour le paramètre n'importe quelle lettre : t, t', s, u et v sont les plus fréquemment utilisées.

♥♥La droite ($\mathcal{D}$) passant par A(x_A ; y_A ; z_A) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$

avec (a ; b ; c) $\neq$ (0 ; 0 ; 0) est l'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que : $\begin{cases} x = x_A + \boldsymbol{a}t \\ y = y_A + \boldsymbol{b}t \\ z = z_A + \boldsymbol{c}t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$. ♥♥

Ce ***système*** est appelé ***une représentation paramétrique*** (notée R.P.) ***de la droite*** **($\mathcal{D}$).**

Il faut bien comprendre qu'à chaque valeur de t, on associe un point $M(x_A + at\ ;\ y_A + bt\ ;\ z_A + ct)$ et un seul, et que réciproquement, à chaque point M de ($\mathcal{D}$) correspond un unique réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$.

Conséquence : toute droite admet une infinité de représentations paramétriques, pourquoi ?

***Remarque* : contrairement au plan, une seule équation ne suffit pas pour définir une droite de l'espace.**

♥♥ Lorsqu'on a une représentation paramétrique d'une droite ($\mathcal{D}$) écrite sous la forme d'un système $\boxed{\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}}$, on peut affirmer, par ***simple lecture des coefficients du système***, que ($\mathcal{D}$) passe par le point A(x_A ; y_A ; z_A) et que $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de ($\mathcal{D}$).♥♥

Exemple 1

On donne la représentation paramétrique d'une droite ($\mathcal{D}$) de l'espace : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a) Définir la droite ($\mathcal{D}$) de deux manières différentes.
b) Déterminer les coordonnées du point de paramètre -2 de ($\mathcal{D}$). Le point C(-10 ; -4 ; -16) appartient-il à ($\mathcal{D}$) ?

✂---

Exemple 2

1) Donner deux représentations paramétriques de la droite ($\mathcal{D}$), passant par A(1 ; 0 ; -2) et par B(2 ; 1 ; -1).

2) Soit (Δ) la droite admettant pour R.P. : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ ') passant par A et parallèle à (Δ).

Exercice 6

Soit la droite $(\mathcal{D})$, dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 3t+1 \\ z = t+1 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

a) Soient B(1 ; 6 ; 0) et C(3 ; 0 ; -2). $(\mathcal{D})$ et (BC) sont-elles parallèles ?

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (BC).

c) Soit E(2 ; -3 ; 1) et F(0 ; 3 ; 3). Démontrer que $(\mathcal{D})$ et (EF) sont ***strictement*** parallèles.

✂--

Exercice 7

1) Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un repère de l'espace.

(d) et (δ) les droites ayant pour représentation paramétrique respective :

(d) : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = 3-3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et (δ) : $\begin{cases} x = s \\ y = -3-3s \\ z = 1-s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Etudier avec soin la position relative de (d) et (δ).

:

2) Même question pour les droites (D) et (Δ) sachant que (D) passe par le point A(2 ; -1 ; 1) et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et que (Δ) admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = s+1 \\ y = 2s-3 \\ z = -s+2 \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

✂--

Exercice 8

Déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse :

Les droites (d) et (d') ont pour représentation paramétrique respective :

(d) : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+3t \\ z = 3-2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et (d') : $\begin{cases} x = -6-7t' \\ y = -25-21t' \\ z = 19+14t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

Affirmation : (d) et (d') sont distinctes.

VI- Orthogonalité dans l'espace

A- Généralités

Définition

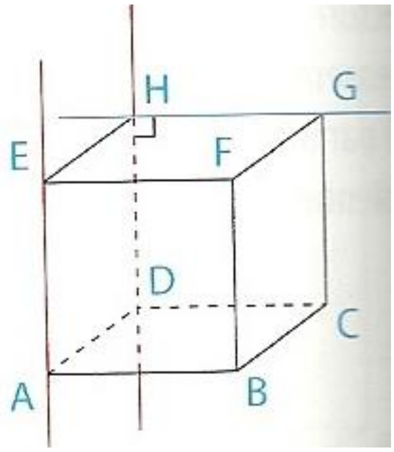
Deux droites de l'espace sont ***orthogonales*** lorsque l*eurs parallèles respectives menées d'un point quelconque* de l'espace sont ***perpendiculaires.***

Exemple

Dans le cube ci-contre, (AE) et (GH) sont orthogonales :

Pourquoi ?

Citer d'autres droites orthogonales.



Remarque

Les termes *"perpendiculaires"* et *"orthogonal"* sont souvent confondus : c'est un abus !

En effet, deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes, alors que deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires, et *a fortiori*, pas nécessairement sécantes.

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, sont orthogonaux s'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites orthogonales.

Dans l'exemple précédent, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux.

B) Produit scalaire dans l'espace

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs ***de l'espace***.

Nous allons voir qu'il est licite de parler de produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On va se ramener à la définition du produit scalaire de deux vecteurs situés dans un MEME PLAN.

Fixons un point A quelconque de l'espace.
On sait qu'il existe alors un unique point B tel que…………….., et un unique point C tel que …………

Illustration :

Avec ce choix de représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont situés dans un même plan, le plan (ABC).

Définition

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, calculé dans le plan (ABC).

Propriété : Toutes les propriétés du produit scalaires énoncées dans le plan s'étendent à l'espace :

En particulier :

1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, on a la formule bien pratique :

♥♥♥ ♥♥♥

2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$. Cette propriété fondamentale est d'un usage récurrent dans les exercices. On notera $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3) Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ est par définition le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par lui-même : $\vec{u}.\vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$.
Grâce à la formule bien pratique 1), on a donc : $\vec{u}^2 =$ ....

En particulier, pour tous points A et B, ♥♥♥ $\overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$ ♥♥♥

4) Enfin, les règles de calcul du produit scalaire du plan s'étendent à l'espace :
Pour tout vecteur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace :

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (on dit que le produit scalaire est commutatif).

$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$. (Distributivité du produit scalaire sur l'addition de vecteurs).

Pour tout réel k, $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$.
5)
$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 =$
$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 =$
En particulier, on a : $\vec{u}.\vec{v} =$ .... = ...

Ces dernières formules sont appelées formules de polarisation, et expriment le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction des normes des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$.

Preuve : il suffit de considérer un plan (P) tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent des représentants dans (P), et d'appliquer les règles du produit scalaires vues dans le plan en première.

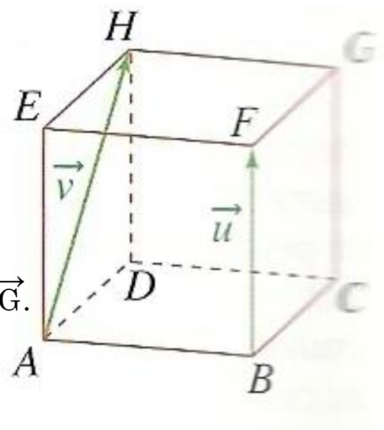
Pour la 5) : $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}.(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}$ $\left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$.

Exemple

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.

a) Calculer $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{AH}$.

b) En utilisant la décomposition : $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EH}$, calculer : $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CG}$.



Définition

Une base ($\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) de l'espace est dite *orthonormée* lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et de même norme égale à 1 : $\vec{i} \perp \vec{j}$; $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$, et de plus, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Exemple : dans le cube précédent, citer une base orthonormée de l'espace.

Un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) est la donnée d'un point O de l'espace et d'une base orthonormée ($\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$).

Nous travaillerons dans toute la suite du chapitre <u>exclusivement dans des repères orthonormés</u>.

***Théorème* (utile pour le bac, et en mécanique ...)**

Si l'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$), et si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors :

1) ♥♥♥ $\vec{u}.\vec{v}$ = = ♥♥♥

En particulier, $\|\vec{u}\|$ = (fondamental, à bien retenir).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonaux si et seulement si :

En particulier, deux droites de l'espace respectivement dirigées par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonales si et seulement si :

2) Si A (x_A ; y_A ; z_A) et B (x_B ; y_B ; z_B), alors :

♥♥♥ AB = ♥♥♥

Preuve

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ donc : $\vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}$.

*)

$\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}).(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})$

distributivité du pdt scalaire.

$\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{i}.x'\vec{i}) + (x\vec{i}).(y'\vec{j}) + (x\vec{i}).(z'\vec{k}) + (y\vec{j}).(x'\vec{i}) + (y\vec{j}).(y'\vec{j}) + (y\vec{j}).(z'\vec{k})$
$+ (z\vec{k}).(x'\vec{i}) + (z\vec{k}).(y'\vec{j}) + (z\vec{k}).(z'\vec{k})$.

$\vec{u}.\vec{v} = xx'(\vec{i}.\vec{i}) + (xy')\vec{i}.\vec{j} + (xz')\vec{i}.\vec{k} + yx'(\vec{j}.\vec{i}) + (yy')\vec{j}.\vec{j} + (yz')\vec{j}.\vec{k}$
$+ (zx')\vec{k}.\vec{i} + (zy')\vec{k}.\vec{j} + (zz')(\vec{k}.\vec{k})$

or $\vec{i}\perp\vec{j}$, donc $\vec{i}.\vec{j}=0=\vec{j}.\vec{i}$; $\vec{j}\perp\vec{k}$, donc $\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{j}=0$; $\vec{i}\perp\vec{k}$ donc $\vec{i}.\vec{k}=0=\vec{k}.\vec{i}$.

Par suite :

$\vec{u}.\vec{v} = xx'\|\vec{i}\|^2 + yy'\|\vec{j}\|^2 + zz'\|\vec{k}\|^2$ CAR $\vec{i}.\vec{i} = \|\vec{i}\|\times\|\vec{i}\|\times\underbrace{\cos(0)}_{1}$. Formule du Physicien !
idem pour $\vec{j}.\vec{j}$ et $\vec{k}.\vec{k}$.

$(\vec{i};\vec{i}) = 0\,[2\pi]$

Donc $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'+zz'}$

**)

Faisons $\vec{v}=\vec{u}$:

$\vec{u}.\vec{u} = x^2+y^2+z^2$ et $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(0) = \|\vec{u}\|^2$

Donc $\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2+z^2$, et comme $\|\vec{u}\|\geq 0$, on a :

$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ #

***)

Posons $\vec{u}=\vec{AB}$: alors $\vec{u}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\\ z_B-z_A\end{pmatrix}$ et la relation # conduit au

résultat voulu : $\|\vec{u}\| = \|\vec{AB}\| = \boxed{AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$ ■

Exercice 9

Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) un R.O.N de l'espace, et (d) et (d') les droites qui ont pour R.P. respectives :

(d) : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 2+t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ et (d') : $\begin{cases} x = -1-s \\ y = 5 \\ z = 2+s \end{cases}$ avec $s\in\mathbb{R}$.

Démontrer que (d) et (d') sont orthogonales.

Exercice 10 ***(hyper classique)***

Soit A(0 ; 1 ; 2), B(1 ; -1 ; 3) et C(-1 ; 2 ; 0) des points d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire une mesure de $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})$ arrondie au degré près.

✂---

Exercice 11

Soit ABCD un tétraèdre régulier d’arête de longueur *a*, et I le milieu de [AB].

a) Exprimer en fonction de *a* chacun des produits scalaires : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Par ce procédé, on peut démontrer que les arêtes opposées d’un tétraèdre <u>régulier</u> sont orthogonales.

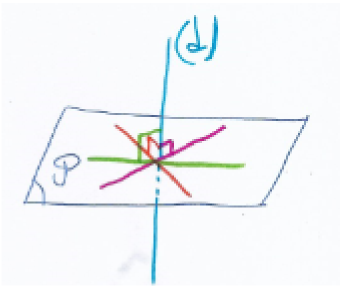
✂---

VII – Vecteur normal à un plan

<u>Définition</u>

Une droite (d) est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ lorsqu’elle est orthogonale à ***toutes*** les droites du plan $\mathscr{P}$.

<u>Illustration</u> :



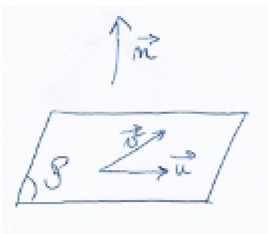
<u>Définition</u>

Soit $(\mathscr{P})$ un plan, et $\vec{n}$ **un vecteur <u>non nul</u>** de l’espace.
On dit que $\vec{n}$ est un <u>vecteur normal au plan $(\mathscr{P})$</u> s’il est orthogonal à tout vecteur du plan $(\mathscr{P})$.

<u>Propriété</u>

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de l’espace, et $(\mathscr{P})$ un plan de l’espace.
$\vec{n}$ est normal au plan $(\mathscr{P})$ si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de $(\mathscr{P})$.

<u>Preuve :</u>



Le sens direct est évident : si $\vec{n}$ est normal au plan $(\mathcal{P})$, alors, par définition, il est orthogonal à tous les vecteurs du plan $(\mathcal{P})$, donc en particulier, il est orthogonal à deux quelconques vecteurs non colinéaires de $(\mathcal{P})$.
Réciproquement, supposons que $\vec{n}$ soit orthogonal à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de $(\mathcal{P})$:
Alors, $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ forme une base de $(\mathcal{P})$ vu que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
Soit $\vec{w}$ un vecteur quelconque du plan $(\mathcal{P})$: vu que $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est une base de $(\mathcal{P})$, $\vec{w}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il existe des réels a et b tels que : $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.
On veut prouver que **$\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux**, donc **on calcule naturellement le produit scalaire $\vec{n}.\vec{w}$:**

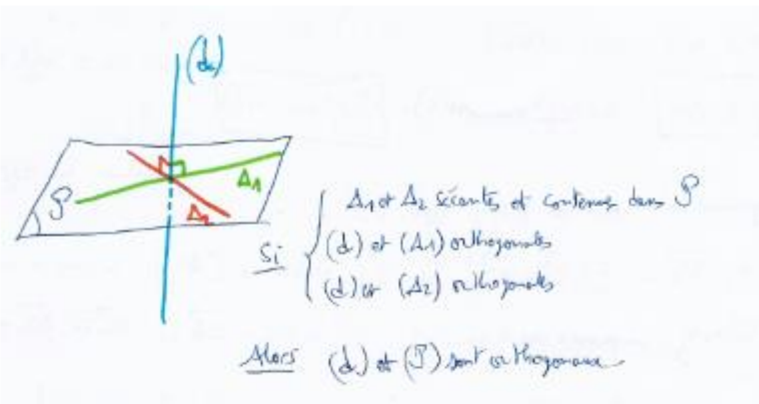
$\vec{n}.\vec{w} = \vec{n}.(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\,\vec{n}.\vec{u} + b\,\vec{n}.\vec{v} = a \times 0 + b\times 0 = 0$ car $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, donc $\vec{n}.\vec{u} = 0$ et de même, $\vec{n}.\,\vec{v} = 0$.

Ainsi, $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux pour tout vecteur $\vec{w}$ de $(\mathcal{P})$, donc par définition, $\vec{n}$ est normal à $(\mathcal{P})$.

Corollaire (fréquemment utilisé en pratique dans les exercices de type bac)

Pour qu'une droite de l'espace soit orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes contenues dans $(\mathcal{P})$.

Illustration

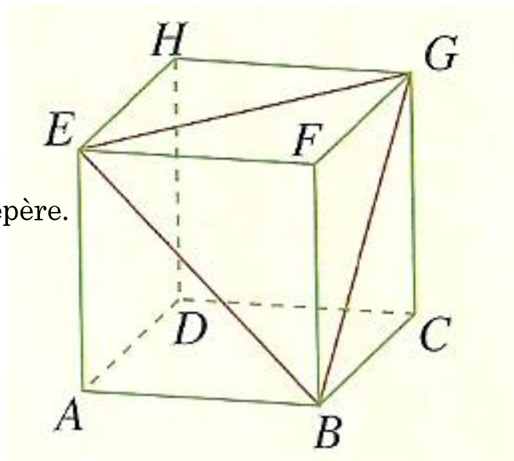


Remarque

Il est fondamental, dans le corollaire précédent, d'avoir deux droites sécantes. Pourquoi ?

Tracer deux droites parallèles sur une feuille de papier, et avec votre équerre, mettez un côté de l'angle droit sur l'une d'elle, pensez-vous que le deuxième côté de l'angle droit de l'équerre soit toujours orthogonal à la seconde droite ??????????? Si vous pensez que oui, faite pivoter votre équerre !

Exercice important (XXL)



ABCDEFGH est un cube muni du R.O.N. $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$.

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{ED}$ dans ce repère.

b) Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BED).

Exercice 12

Soit ABCD un tétraèdre régulier, et I le milieu de [AB].

a) Par des arguments de géométrie de collège, démontrer que la droite (AB) et le plan (ICD) sont orthogonaux.

b) En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

✂--

VIII-Equations cartésiennes d'un plan

Propriété XXXXL

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace, et A un point de l'espace muni d'un R.O.N. $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

1) Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et orthogonal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que : …………..

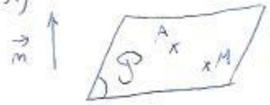
2a) ♥♥♥Tout plan $\mathcal{P}$ ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une <u>équation cartésienne</u> de la forme : …………………..   où $d \in \mathbb{R}$.♥♥♥

2b) ♥♥♥Réciproquement, si $(a\ ;\ b\ ;\ c) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, alors l'ensemble

$\mathcal{P} = \{M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ /\ ax + by + cz + d = 0\}$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.♥♥♥

<u>Preuve</u> : écrite sur la feuille ci-jointe.

1)



2) $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal à $(\mathcal{P})$ et $A \in (\mathcal{P})$.

$M \in (\mathcal{P}) \Longleftrightarrow \vec{AM}.\vec{n} = 0$.

Notons $A(\alpha;\beta;\gamma)$ et $M(x;y;z)$ dans le r.o.n $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$:

$\vec{AM}\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \\ z-\gamma \end{pmatrix}$; $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. $M \in (\mathcal{P}) \Longleftrightarrow \vec{AM}.\vec{n} = 0 \Longleftrightarrow a(x-\alpha) + b(y-\beta) + c(z-\gamma) = 0$

$M \in (\mathcal{P}) \Longleftrightarrow ax - a\alpha + by - b\beta + cz - c\gamma = 0 \Longleftrightarrow ax + by + cz - \underbrace{(a\alpha + b\beta + c\gamma)}=0$, On nomme $d = -(a\alpha + b\beta + c\gamma)$

Ainsi, $M \in (\mathcal{P}) \Longleftrightarrow \underbrace{ax + by + cz + d = 0}_{\text{appelée une équation cartésienne de } (\mathcal{P})}$.

2b) $(a;b;c) \neq (0;0;0)$ et $(\mathcal{P}) = \{M(x;y;z) / ax + by + cz + d = 0\}$.

*) Montrons déjà que $(\mathcal{P}) \neq \emptyset$:

Vu que $(a;b;c) \neq (0;0;0)$, on peut sans perte de généralité, supposer que $a \neq 0$.

Pour $y = z = 0$, $ax + by + cz + d = 0$ s'écrit donc : $ax + d = 0$, donc $x = \frac{-d}{a}$ $(a \neq 0)$.

Ainsi, $A\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right) \in (\mathcal{P})$, donc $(\mathcal{P}) \neq \emptyset$.

**) Soit $M(x;y;z) \in (\mathcal{P})$: on a donc : $ax + by + cz + d = 0$.

Or, $\vec{AM}\begin{pmatrix} x - (-\frac{d}{a}) \\ y - 0 \\ z - 0 \end{pmatrix}$, donc $\vec{AM}\begin{pmatrix} x + \frac{d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$\vec{AM}.\vec{n} = \left(x + \frac{d}{a}\right) \times a + y \times b + z \times c = ax + by + cz + d$. Or par (**), $ax + by + cz + d = 0$.

Ainsi, $\vec{AM}.\vec{n} = 0$ et grâce à la caractérisation vue en 1) : $(\mathcal{P})$ est le plan passant par A et admettant

$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Exemples

$x - 2y + z + 3 = 0$ est l'équation d'un plan car cette dernière, qui se réécrit sous la forme :
$1x + (-2)y + 1z + 3 = 0$ est de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ avec : $a = 1$; $b = -2$; $c = 1$ et $d = 3$ et que (1 ; -2 ; 1) n'est pas le triplet nul. Mieux, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan.

Comment trouve-t-on les coordonnées d'un point appartenant à ce plan ?

Donnez à deux des inconnues de son choix les valeurs de son choix, et en résolvant l'équation, on obtient la valeur de la troisième inconnue.

Par exemple, je fais $x = 0$ et $y = 0$ dans la relation : $x - 2y + z + 3 = 0$ ce qui donne : $0 - 0 + z + 3 = 0$ donc $z = -3$ et par suite, le point A(0 ; 0 ; -3) appartient au plan d'équation $x - 2y + z + 3 = 0$.

Enfin un plan contient une infinité de points !!! Par exemple, ici, B(1 ; 0 ; -4) C(- 3 ; 0 ; 0) D(4 ; 2 ; -3) sont des points appartenant au plan d'équation : $x - 2y + z + 3 = 0$. !
Trouvez les coordonnées d'un autre point appartenant à ce plan !!

Remarques

Cas particuliers importants :

Le plan d'équation $x = 0$ correspond au plan……………………………………………………………………..

Le plan d'équation $y = 0$ correspond au plan …………………………………………………………………….

Le plan d'équation $z = 0$ correspond au plan …………………………………………………………………….

Que dire de deux plans qui ont des vecteurs normaux égaux (ou colinéaires) ?

Exercice 13 (***le basique, à maîtriser parfaitement***)

Soit $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ un R.O.N. de l'espace, et A(1 ; 0 ; 2), B(3 ; 1 ; -1) et C(0 ; 0 ; 4).

On admet que A, B et C ne sont pas alignés.

1a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

1b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC). (Question qui tombe avec une probabilité égale ou supérieure à 0,9999 au bac…).

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (ABC) et passant par le point K milieu de [AC].

3) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $\mathcal{P}$ suivant :
$\mathcal{P} = \{M(x ; y ; z) / 2x - y + z + 4 = 0\}$.

d) On appelle plan médiateur du segment [BC] le plan $\mathcal{M}$ passant par le milieu I de [BC] et ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{M}$.

Exercice 14 Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) un repère orthonormé de l'espace.

a) Démontrez que les points A(2 ; 1 ; 3), B(-3 ; -1 ; 7) et C(3 ; 2 ; 4) définissent un plan $\mathcal{P}$.

b) Démontrer que la droite (d) dont une R.P. est : $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$.

c) En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

d) Soit D(1 ; 0 ; 5). Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ? Justifier.

e) Déterminer les coordonnées du point H intersection de (d) et de $\mathcal{P}$.

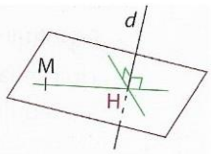
✂---

VIII- Projeté orthogonal

A Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition

Le **projeté orthogonal** d'un point M sur une droite *d* est le point d'intersection H de *d* avec le plan passant par M et orthogonal à *d*.



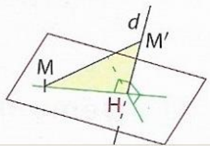
Remarques : • Le plan passant par M et orthogonal à *d* est unique.
• Lorsque M ∈ *d*, le projeté orthogonal de M sur *d* est le point M.

Propriété – Définition

Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite *d* est le point de *d* **le plus proche** de M.
On dit que MH est la **distance** du point M à la droite *d*.

Démonstration

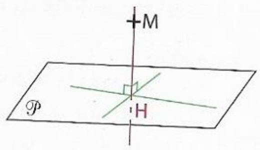
• Si M ∈ *d*, alors MH = 0 et H est le point de *d* le plus proche de M.
• Si M ∉ *d*, alors pour tout point M′ de *d*, le triangle MHM′ est rectangle en H, donc son hypoténuse est le côté le plus long soit MM′ > MH.
Donc H est le point de *d* le plus proche de M.



B Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition

Le **projeté orthogonal** d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point d'intersection H du plan $\mathcal{P}$ et de la droite passant par M orthogonale à $\mathcal{P}$.



Remarque : lorsque M ∈ $\mathcal{P}$, le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est le point M.

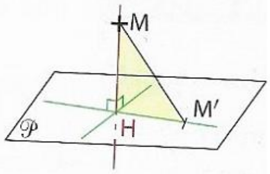
Propriété – Définition

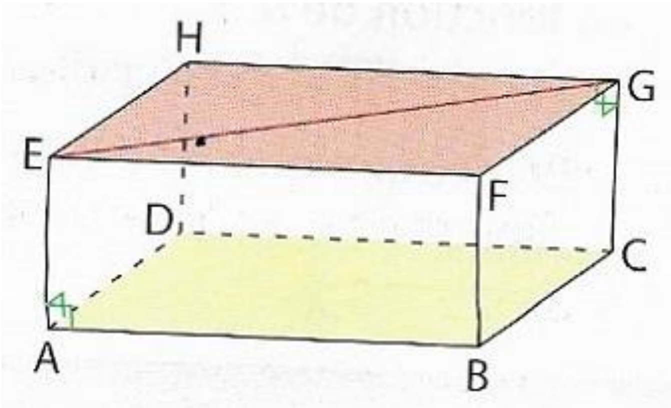
Le projeté orthogonal H d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ **le plus proche** de M.
On dit que MH est la **distance** du point M au plan $\mathcal{P}$.

Démonstration

- Si $M \in \mathcal{P}$, alors $MH = 0$ et H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.
- Si $M \notin \mathcal{P}$, alors pour tout point M′ de $\mathcal{P}$, le triangle MHM′ est rectangle en H, donc son hypoténuse est le côté le plus long, soit $MM' > MH$.

Donc H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.





Exemple

Dans le pavé droit ABCDEFGH, ci-contre, déterminer :

a) Le projeté orthogonal du point H sur le plan (ABC).

b) Le projeté orthogonal du point E sur la droite (CG).

Exercice 15

Soit $(O \; ; \; \vec{i} \; ; \; \vec{j} \; ; \; \vec{k})$ un R.O.N. de l'espace.

Soit (d) la droite passant par A(1 ; -2 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et B(-15 ; -10 ; 4).

On se propose de déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de B sur la droite (d).

a) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par B et orthogonal à (d).

b) En déduire les coordonnées du point H.

c) Calculer la distance du point B à la droite (d).

✂---

Exercice 16

Soit $(O \; ; \; \vec{i} \; ; \; \vec{j} \; ; \; \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A(3 ; 1 ; -2) de de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$, parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par le point B(-5 ; 0 ; 7).

Exercice 17

Soit A(1 ; –5 ; 3), B(2 ; –4 ; 4), C(–1 ; –2 ; 2) et D(18 ; –13 ; 25) quatre points de l'espace.

1. a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Déterminer l'aire du triangle ABC.

2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(-4 ; -1 ; 5)$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire une équation du plan (ABC).

c. Vérifier que le point H(–2 ; –8 ; 0) est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

3. a. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).

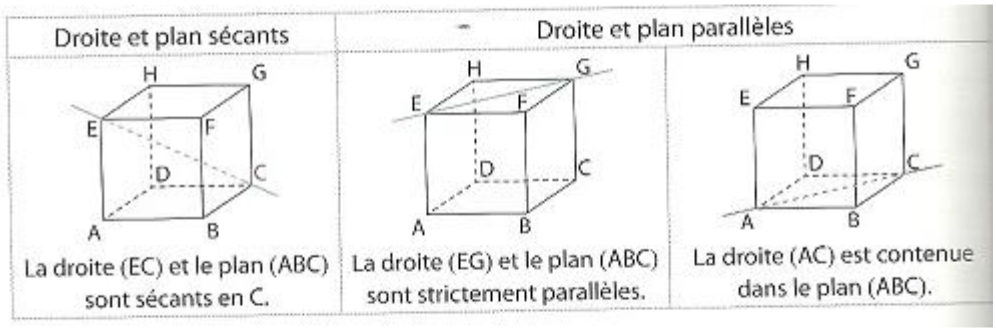
b. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

✂---

IX-Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace

A-Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants et ont alors un unique point d'intersection, soit parallèles et n'ont alors aucun point d'intersection.



Propriété (admise)

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{w}$, et $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{u} ; \vec{v})$ et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. ♥♥♥ **(d) et $\mathcal{P}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{w}$ *et* $\vec{n}$ sont ……………….** ♥♥♥

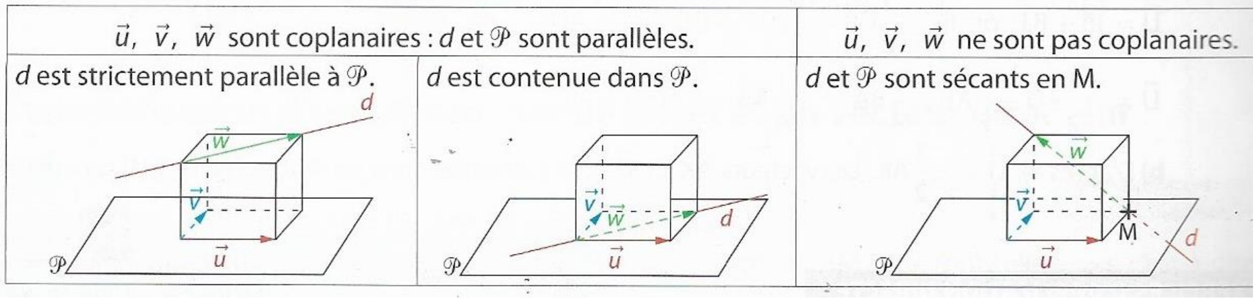
2. **(d) et $\mathcal{P}$ sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\vec{w}$ *et* $\vec{n}$ ne sont pas ……………….**

On a aussi les deux règles suivantes moins utilisées :

1bis. ♥♥♥ (d) et $\mathcal{P}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ………………. ♥♥♥

2bis. (d) et $\mathcal{P}$ sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas ……………….

• $\mathcal{P}$ est un plan de direction $(\vec{u}, \vec{v})$ et d est une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

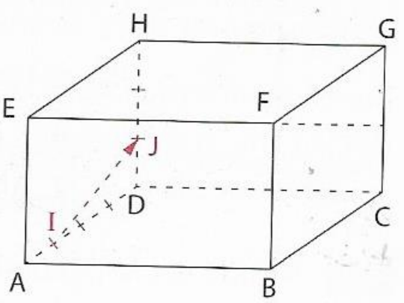


Remarque : dans les exercices, sans vecteurs, lorsqu'on voudra justifier qu'une droite (d) et un plan $\mathcal{P}$ sont parallèles, il suffira donc de justifier que la droite (d) est parallèle à l'une des droites contenues dans le plan $\mathcal{P}$.

On procédera essentiellement de façon vectorielle.

Exercice 18

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I et J sont les points définies par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.



a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.

b) En déduire que la droite (IJ) et le plan (BCG) sont parallèles.

✂---

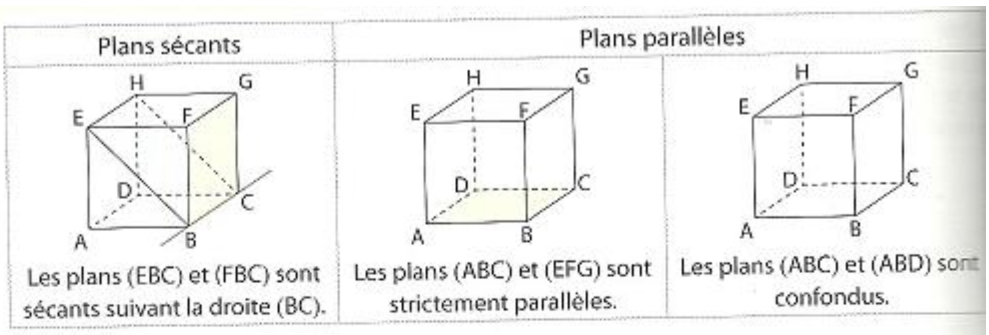
B- Position relative de deux plans de l'espace

Rappel : En géométrie dans l'espace, deux plans sont strictement parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point en commun, confondus lorsqu'ils ont tous leurs points en commun.

Deux plans sont dits sécants lorsqu'ils ne sont ni parallèles ni confondus.

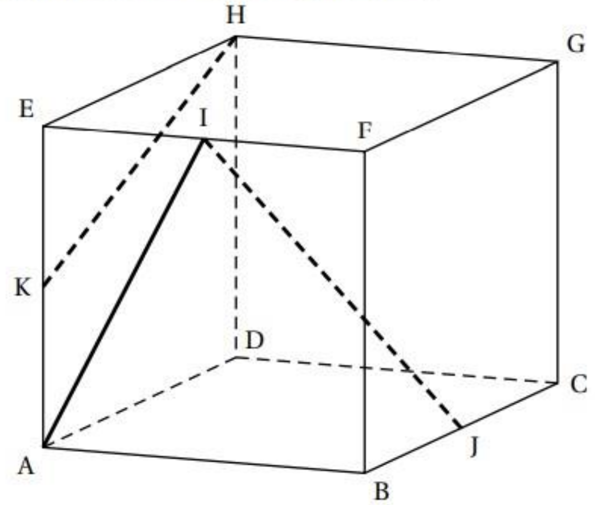
Deux plans sécants se coupent (toujours) suivant une droite.

Illustration :



Exercice I

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles? Justifier votre réponse,

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

2. **a.** Donner les coordonnées des points I et J.

   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3y-2z+2-0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+t \\ y &=& 8-2t \\ z &=& -2+3t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 8+2t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles? Justifier votre réponse.
4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
5. Montrer que le point L(4; 0; 3) est le projeté orthogonal du point M(5; 3; 1) sur le plan $\mathscr{P}$.

✂--

Exercice II (métropole 2022)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1\,;\,1\,;\,3)$,
- la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 2-t, \\ z &=& 2+2t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.

   b. Montrer que le point $B(-1\,;\,3\,;\,0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}$.

2. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

   a. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

   b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{19}{9}\,;\,\frac{16}{9}\right)$.

   c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.

   On rappelle que le point B$(-1\,;\,3\,;\,0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

   a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

   b. Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$.

   c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathscr{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$.

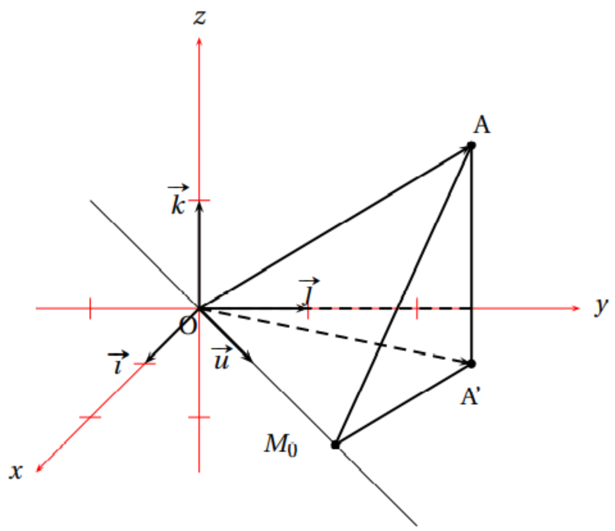
   Calculer l'aire du triangle ACH.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Exercice III

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.



Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\,;\,t\,;\,0)$.

a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :

$$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$

b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\,;\,2\,;\,0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.
On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\,;\,3\,;\,0)$.

Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.

5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.

On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

Définition

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.

Soit Ω un point de l'espace, et r un réel positif.

La sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que $\Omega M = r$.

Illustration :

Propriété (à la frontière du programme)

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$, soit Ω un point de l'espace, et r un réel positif.

La sphère de centre Ω et de rayon r a pour équation réduite :

Exemple : Déterminer l'équation réduite de la sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega(1\,;\,2\,;\,-1)$ et de rayon $r = 3$.

Le point $M(2\,;\,0\,;\,-1)$ appartient-il à $\mathscr{S}$?

Trouver les coordonnées du point diamétralement opposé sur $\mathscr{S}$ au point $K(1\,;2\,;-4)$. On commencera par vérifier que K appartient à $\mathscr{S}$.

Exercice IV L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(5 ; 0 ; -1)$, $B(1 ; 4 ; -1)$, $C(1 ; 0 ; 3)$, $D(5 ; 4 ; 3)$ et $E(10 ; 9 ; 8)$.

1. **a.** Soit R le milieu du segment [AB].
   Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   b. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ est :

$$x - y - 1 = 0.$$

   c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathscr{P}_1$ et que $EA = EB$.

2. On considère le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.

   a. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

   b. On note Δ la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
   Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3. On considère le plan $\mathscr{P}_3$ d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.
   Justifier que la droite Δ est sécante au plan $\mathscr{P}_3$ en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS = MT$ est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST]. On admet que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

4. **a.** Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

   b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice V (Métropole 2011)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et par M_0 le point de coordonnées $\left(x_0 ; y_0 ; z_0\right)$. On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$.

On suppose connue la propriété suivante :
Propriété : Le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d\left(M_0, \mathscr{P}\right)$ du point M_0 au plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que

$$d\left(M_0, \mathscr{P}\right) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1. Justifier que $\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
2. Démontrer que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$.
3. Conclure.

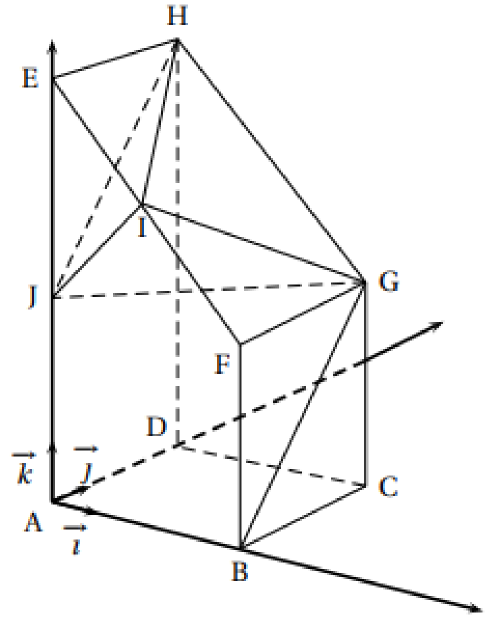
Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $(4 ; 1 ; 5)$, $(-3 ; 2 ; 0)$, $(1 ; 3 ; 6)$, $(-7 ; 0 ; 4)$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathscr{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x + 2y - z - 1 = 0$.

   b. Déterminer la distance d du point F au plan $\mathscr{P}$.

Exercice VI



On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.
On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{\imath}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\quad \vec{\jmath}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\quad \vec{k}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AE}.$$

De plus on a $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
On note I le milieu du segment [EF].
On note J le milieu du segment [AE].

1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.
   - **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).
   - **b.** Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.
4. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).
   Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{4}{3}\,;\,\frac{16}{3}\right)$.
5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).
6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.
7. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V=\frac{1}{3}\times(\text{aire de la base})\times\text{hauteur}.$$

Exercice VII

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère :

- le point $A(1\,;\,-1\,;\,-1)$;
- le plan $\mathscr{P}_1$, d'équation : $5x+2y+4z=17$;
- le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation : $10x+14y+3z=19$;
- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -t \\ z & = & 3-2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
3. **a.** Vérifier que A n'appartient pas à $\mathscr{P}_1$.
   b. Justifier que A n'appartient pas à $\mathscr{D}$.
4. Pour tout réel t, on note M le point de $\mathscr{D}$ de coordonnées $(1+2t\,;\,-t\,;\,3-2t)$.
   On considère alors la fonction f qui à tout réel t associe AM^2, soit $f(t)=AM^2$.
   a. Démontrer que pour tout réel t, on a : $f(t)=9t^2-18t+17$.
   b. Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3\,;\,-1\,;\,1)$.
5. On note H le point de coordonnées $(3\,;\,-1\,;\,1)$.
   Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

Exercice VIII

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère :

$$A(3\,;\,0\,;\,1),\qquad B(2\,;\,1\,;\,2)\quad \text{et}\quad C(-2\,;\,-5\,;\,1).$$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :

$$-x+y-2z+5=0.$$

4. On considère le point $S(1\,;\,-2\,;\,4)$.
   Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ), passant par S et orthogonale au plan (ABC).
5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
   Montrer que les coordonnées de H sont $(0\,;\,-1\,;\,2)$.
6. Calculer la valeur exacte de la distance SH.
7. On considère le cercle $\mathscr{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathscr{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathscr{C}$.
   Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathscr{D}$.
8. En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque $\mathscr{D}$.