« En mathématiques, évident est le mot le plus dangereux. » *Eric Temple Bell*

Chapitre VIII	**Fonction logarithme népérien**

I – Généralités

On sait que la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a le tableau de variation suivant :

Donc, pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$, d'inconnue x, admet……………………………

Définition

Soit ***a* *un réel strictement positif.***
On appelle logarithme népérien de a, noté **ln(*a*)**, ***l'unique réel solution de l'équation :*** $e^x = a$, ***d'inconnue x.***

Conséquences

La fonction logarithme népérien, notée ***ln***, est ***définie*** sur $]0\ ;\ +\infty[$, et à tout réel x strictement positif, elle associe le réel ***ln(x)*** dont l'exponentielle vaut x.

$$\ln :]0\ ;\ +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln(x) \quad \text{avec par définition, } e^{\ln(x)} = x.$$

Important : On a donc :	$x > 0$ et $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$

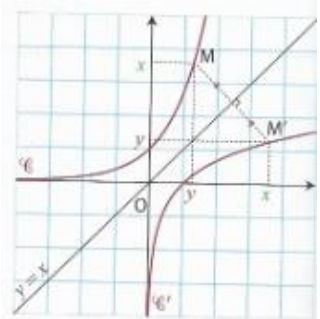
On a donc immédiatement : ♥♥♥

- Pour tout réel ***x strictement positif,*** $e^{\ln(x)} = \ldots..$
- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = \ldots\ldots.$
- $\ln(1) = \ldots\ldots\ldots$
- $\ln(e) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarque : Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ du plan, les courbes représentatives de la fonction exponentielle et celle de la fonction ***ln*** sont donc ……………………………………………………………

Illustration et justification :

On note respectivement $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives des fonctions exp et ln. Pour tous réels $x > 0$ et y, dire que $M'(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}'$ équivaut à $y = \ln(x)$, c'est-à-dire $x = e^y$, ce qui équivaut à dire que $M(y\,;x)$ appartient à $\mathscr{C}$.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Pour tous réels a et b ***strictement positifs***, on a l'équivalence : $\boxed{\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b}$.

Exercice1

Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $\ln(x) = -3$; *b)* $\ln(x) = 4$; *c)* $e^x = 2$; *d)* $\ln(x+5) = \ln(4x-8)$; *e)* $3e^{2x} - 5 = 0$

II - Propriétés algébriques de la fonction ln

Théorème (*relation fonctionnelle* de $\ln$)

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : ♥ $\ln(xy)$ = ……………………….♥

Remarque : La fonction $\ln$ transforme donc……………………………………………………………….....

(soit l'action………………………………………………………………………………………………...).

Preuve :

♥♥ *Propriétés importantes de la fonction ln* ♥♥

1) Pour tout réel $x > 0$, $\ln(\frac{1}{x})$ = ………

2) Pour tous réels x et y strictement positifs, $\ln(\frac{x}{y})$ = …………

3) Pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier relatif n, $\ln(x^n)$ = …………

4) Pour tout réel $x > 0$, $\ln(\sqrt{x})$ = …………………

Preuve :

Exercice 2

1) Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$, chacune des expressions suivantes :

$A = \ln(6)$; $B = \ln(9)$; $C = \ln(\frac{2}{3})$; $D = \ln(\frac{1}{12})$; $E = \ln(\sqrt{12})$; $F = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1)$

2) Simplifier les écritures : $G = \ln(\frac{1}{e^2})$ $\quad H = \ln(e^4) + \ln(2e^{-1})$.

13 **a)** Démontrer que pour tout réel x,

$$4x + \ln(1 + e^{-4x}) = \ln(e^{4x} + 1).$$

b) Résoudre l'équation $4x + \ln(1 + e^{-4x}) = 7$.

14 Démontrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\ln(x^3) - 6\ln(\sqrt{x}) = 0.$$

15 Démontrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\ln(2x + 3) = \ln(x) + \ln\left(2 + \frac{3}{x}\right).$$

III – Sens de variation de la fonction ln et conséquences

Propriété

1) $\ln$ est définie et continue sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) $\ln$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, $(\ln)'(x) =$ ....

3) La fonction $\ln$ est ....sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Preuve :

Conséquences : Etude du signe de $\ln(x)$, pour $x > 0$:

- $\ln(1) = ...$
- $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow$ ……………………………..
- $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow$ ……………………………..

- Pour tous réels x et y strictement positifs : $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow$ ………………..
  $\ln(x) \geq \ln(y) \Leftrightarrow$ ………………..

On retiendra donc que sur………………, la fonction $\ln$ est à valeurs ……………………., et que sur ………., la fonction $\ln$ est à valeurs strictement………………..

Preuve :

Illustration graphique : premier tracé de la courbe représentant la fonction $\ln$.

Exercice 3

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \ln(4 - 2x)$.

2a) Etudier le signe de $u(x) = \ln(x) - 2$ sur $]0\,;+\infty[$.
2b) Etudier le sens de variation de la fonction g définie par $g(x) = x\ln(x) - 3x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(x+3) + \ln(x-2) \leq \ln(6)$

Exercice 4 *(Fondamental XXL, bac)*

a) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $0{,}95^n \leq 10^{-8}$; $2^n > 10^6$.

b) n est un entier naturel non nul.

Exprimer, en fonction de n, la probabilité, notée p_n, de l'événement suivant noté A_n :
A_n : "Obtenir au moins une fois six lors des n lancers".

b') Déterminer, algébriquement, le nombre minimal de lancers à effectuer, pour que p_n soit supérieure à 0,99.

IV - Limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction ln

Propriété	♥♥♥ $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) =$ .... ***et*** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} ln(x)=$ .... ♥♥♥

Preuve :

Application

Donner le tableau de variation complet de la fonction ***ln***, et tracer dans un *repère orthonormé* $(O;\vec{i}\,;\,\vec{j})$ du plan sa courbe représentative.
On donnera les équations des tangente à C_{ln} aux points $A(1\ ;\ 0)$ et $B(e\ ;\ 1)$.
Justifier que C_{ln} est située au-dessous de chacune de ses tangentes sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Propriété (croissances comparées)

- ♥♥♥♥♥ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x} =$ .... ♥♥♥♥♥ Pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x^n} =$ ....

En d'autres termes, la fonction ***ln*** est négligeable devant l'identité au voisinage de $+\infty$.

- ♥♥♥♥♥ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\,ln(x) =$ .... ♥♥♥♥♥ Pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n ln(x) =$ ....

Preuve :

Exercice 5

1) Déterminer les limites suivantes : *a)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x-\ln(x))$; *b)* $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln(x))$; *c)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x\ln(x)}$

2) Pout tout réel $x > 0$, $f(x) = ln(e^x + 3x) - x$.

Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = ln\left(1+\dfrac{3x}{e^x}\right)$ et en déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3) Déterminer, en revenant à la définition du nombre dérivé : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{ln(1+h)}{h} =$ ......

V- Fonctions composées et logarithme népérien

Propriété

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = ln(u(x))$.

Alors g est dérivable sur I, et pour tout réel x appartenant à I, on a : ♥♥ $g'(x)$ = ………..♥♥.

Preuve :

Exercice 6

1) Calculer la dérivée de : $f(x) = ln(2x^2 + 1)$. Préciser l'intervalle de dérivabilité de f.

2) Même question avec : $g(x) = ln(4+2e^x)$.

3) Même question avec : $h(x) = ln(e^{-x} + 1)$.

VI – Logarithme décimal (celui utilisé en Physique, Chimie, SI)

Définition : On appelle fonction logarithme décimal (ou logarithme à base 10), la fonction notée ***log***, définie sur ………….. par : $log(x)$ = ………..

Remarque : $log(x)$ est donc égale au produit d'une constante multiplicative et de $ln(x)$.

Calculer :

$log(1)$ = ….

$log(10)$ = ….

$log(100)$ = ….

$log(10^n)$ = ….. où n est un entier naturel.

La fonction ***log*** a les mêmes propriétés algébriques que la fonction ***ln***, elle a aussi même sens de variation et mêmes limites aux bornes de l'ensemble de définition que la fonction ***ln***. Montrons par exemple quelques-unes de ses propriétés :

La fonction ***log*** est par exemple utilisée en Chimie : $pH = -\log[H_3O^+]$.

Par exemple, si on dilue 10 fois une solution de monoacide fort, que fait le *p*H de la solution initiale ?

La fonction ***log*** est aussi utilisée dans de nombreux domaines tels l'acoustique.

Une utilité de la fonction ***log*** en arithmétique: elle permet de déterminer le nombre de chiffres d'un entier écrit dans le système décimal.

Rappel: Soit A entier naturel. Il existe un unique entier naturel ***n***, tel que : ……………………..

Remarque : l'écriture décimale de A est donc composée de …………. chiffres au total.

On a de plus :

Donc, le nombre total de chiffre de l'écriture décimale de A est égal à : …………………..

Application : Combien de chiffre comporte l'écriture décimale de $A = 2^{2022}$?

Exercice complémentaire

Complément : Fonctions puissances.

Pour tout réel $x > 0$, on définit, pour tout réel a, x^a par : $x^a = $ *……..*

Etudier suivant les valeurs du réel ***a***, le sens de variation de la fonction ***f*** définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$f(x) = x^a$.

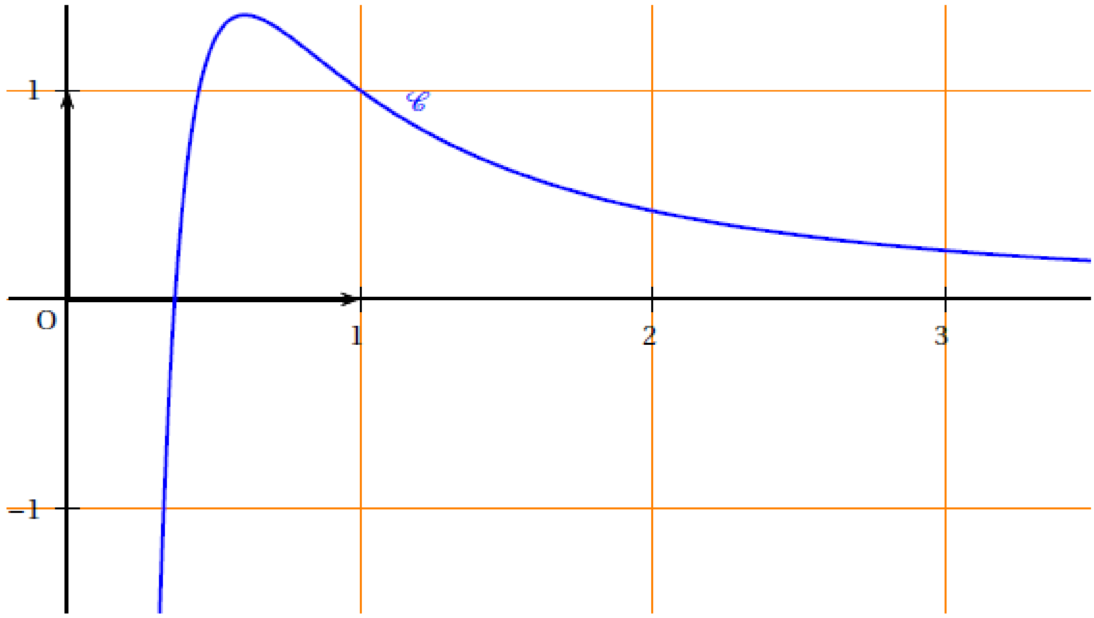
VII – Quelques exercices de type bac

Exercice I

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. **a.** Étudier la limite de f en 0.

   b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice II

Vrai ou Faux : justifier comme il se doit :

1)

Affirmation 1 : $ln(\sqrt{e^7}) + \dfrac{ln(e^9)}{ln(e^2)} = \dfrac{e^{ln(2)+ln(3)}}{e^{ln(3)-ln(4)}}$

2)

Soit n un entier strictement positif.
Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f_n(x) = 2ne^x - e^{2x}$$

et $\mathscr{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Affirmation 2 : $\mathscr{C}_n$ admet une unique tangente horizontale en un unique point nommé S_n dont l'ordonnée est égale à n^2.

Affirmation 3 : l'équation : $ln(x - 1) - ln(x + 2) = ln(4)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice III

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,802 775 42
4	2	5,885 444 74
5	3	4,299 184 42
6	4	3,105 509 13
7	5	2,360 951 82
8	6	2,052 767 5
9	7	2,001 345 09
10	8	2,000 000 9

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?
2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in]1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

   b. En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, complété par les limites.

   c. Justifier que pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 2$.

Partie III :

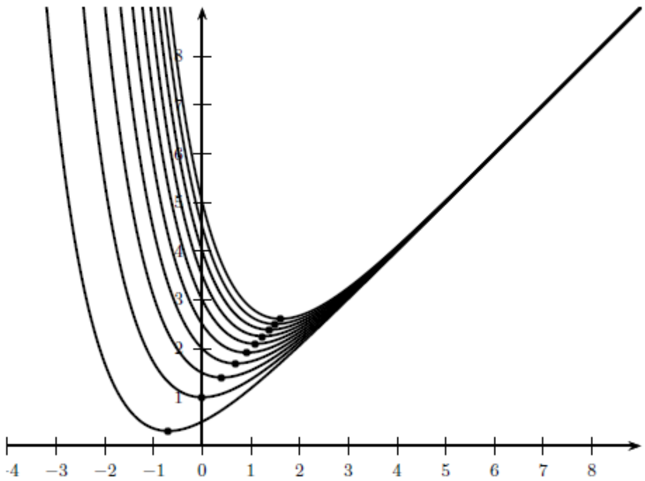
1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
4. On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Donner la valeur de ℓ.

Exercice IV

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.
Est-ce le cas ?

Exercice V

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :
   $$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$
3. **a.** Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   On admettra que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

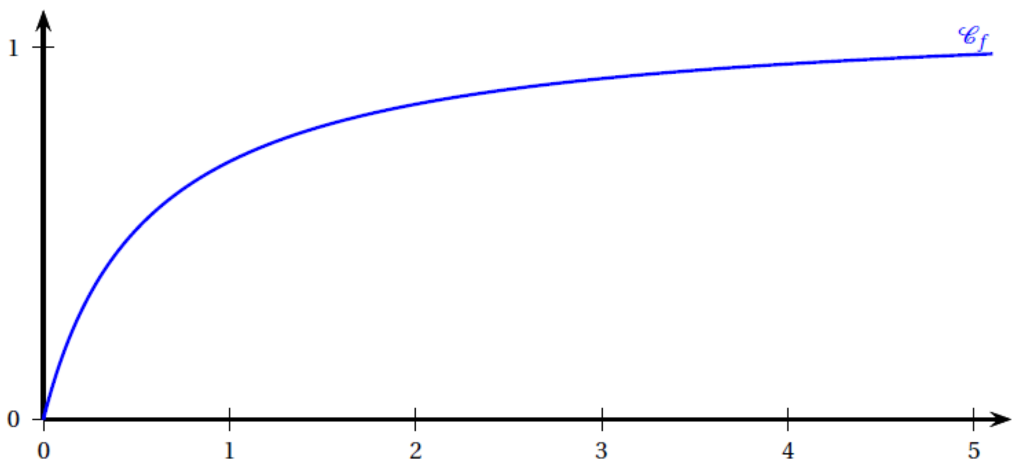
   b. Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$.
4. Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.
   On justifiera que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

Exercice VI

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
2. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

   b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$.

L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ où $x_0 = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}215$ et $g\left(x_0\right) \approx 0{,}088$, en arrondissant à 10^{-3}.

x	0		x_0		$+\infty$
Variations de la fonction g			$g(x_0)$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				$-\infty$

1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.
2.
   a. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à 0,01 près.

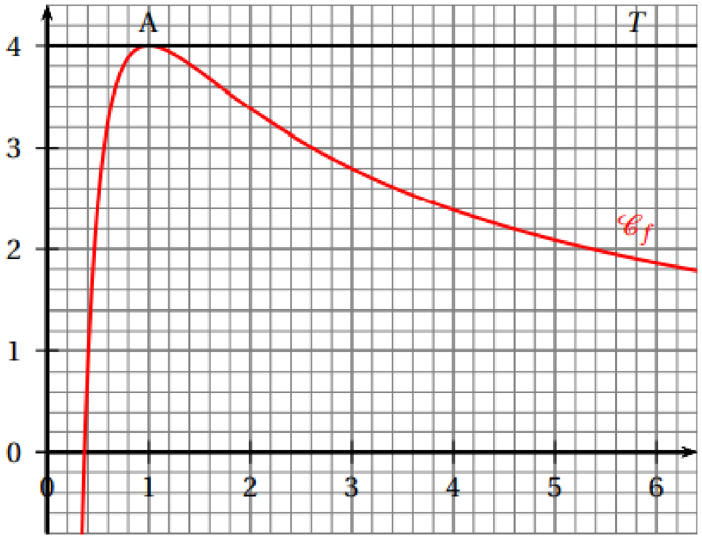
   b. Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

$x \leftarrow 0{,}22$
Tant que .... faire
$\quad x \leftarrow x + 0{,}01$
Fin de Tant que

3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice VII

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A(1 ; 4).



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

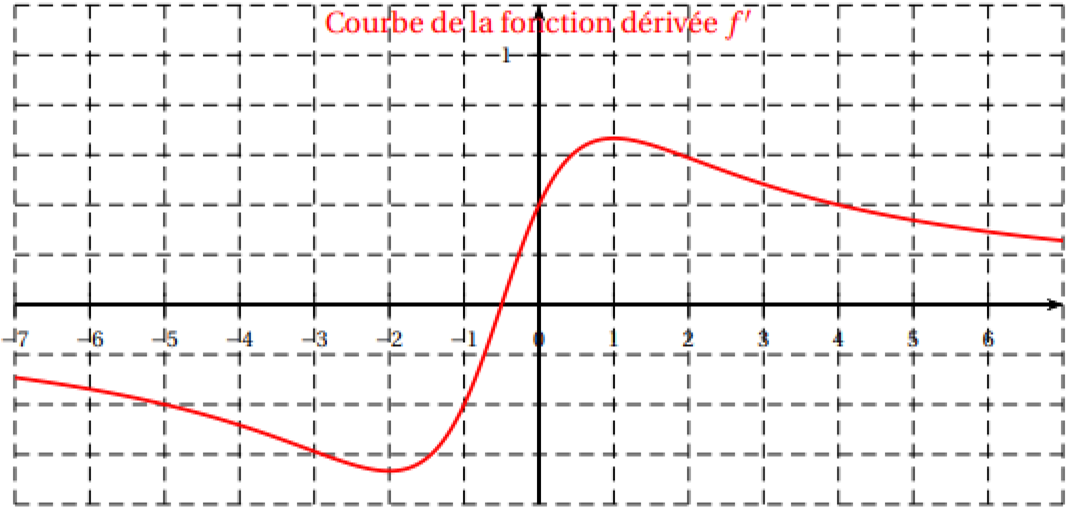
$$f''(x) = \frac{-4 + 8\ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

Exercice VIII

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2. a. Donner les variations de la fonction dérivée f'.

   b. En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. a. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.