CHAPITRE VIII LE PRODUIT SCALAIRE ET SES APPLICATIONS

I – Généralités sur le produit scalaire

Définition du produit scalaire

- ✓ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Il existe des points A, B et C du plan tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$, est le nombre réel, noté $\vec{u}.\vec{v}$ (lire : " $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ "), et défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

- ✓ Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Remarques

1) Le nom produit scalaire ne doit pas faire croire qu'on fait un produit (au sens multiplication) de vecteurs !
Le produit scalaire de deux vecteurs est toujours un nombre réel.

2) On appelle ***carré scalaire*** du vecteur $\vec{u}$, le réel $\vec{u}.\vec{u}$ noté $\vec{u}^{\,2}$.

On a : $\vec{u}^{\,2} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB \times AB \times \cos(0) = AB \times AB \times 1 = AB^2$.

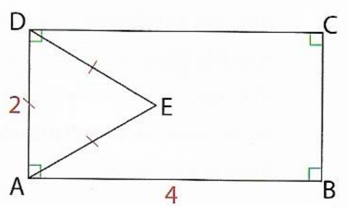
3) La longueur AB est encore appelée la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et notée : $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Exercice 1

ABCD est un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 2$.
AED est un triangle équilatéral situé à l'intérieur de ABCD.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AE}$.



c) Calculer les produits scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

✂ --

Exercice 2

Vincent s'initie au kitesurf. Il se déplace en ligne droite d'un point A à un point B sur une distance de 50 m. La force de traction $\vec{F}$ exercée par la voile a pour intensité 1 000 newtons ($\|\vec{F}\| = 1000$).
En physique, le travail de la force $\vec{F}$ lors du déplacement de A en B est le nombre, noté W, tel que $W = AB \times \|\vec{F}\| \times \cos(\widehat{BAC})$.
L'unité du travail est le joule (noté J).

1 **a)** Reproduire et compléter le tableau ci-dessous à l'aide de valeurs exactes.

$\widehat{BAC}$	0°	30°	45°		120°
W				25 000	

b) Louise affirme : « Si le vecteur $\vec{F}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $\vec{F}$ n'influence pas le déplacement. » Est-ce exact ?

2 **a)** Étudier le signe de W en fonction de la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.

b) Les physiciens parlent de travail résistant lorsque $W < 0$. Justifier le vocabulaire.

W est appelé produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur $\vec{F}$ et se note $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{F}$.

Conséquences de la définition du produit scalaire de deux vecteurs :

- ✓ Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (on dit que le produit scalaire est commutatif, c'est-à-dire que sa valeur est indépendante de l'ordre des vecteurs).

- ✓ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et ont le même sens, alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = ...$
- ✓ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = ...$

Définition

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux lorsque les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Illustration :

Remarque

Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Théorème* :** ***Le produit scalaire, un puissant outil pour mesurer l'orthogonalité.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que : $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ = ...

Preuve :

Exemple

Soient A et B deux points, et C un point appartenant au cercle de diamètre AB.

Déterminer la valeur de $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

II- Calcul du produit scalaire dans un repère orthonormé

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ un repère orthonormée du plan, c'est-à-dire qu'on se donne un point O appelé origine du repère, et un couple de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ orthogonaux et de norme égale à 1.

Le vecteur $\vec{i}$ dirige l'axe des abscisses et le vecteur $\vec{j}$ dirige l'axe des ordonnées.

Illustration :

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose sous la forme unique : $\vec{u} = x\vec{i} + y\,\overrightarrow{j}$: le couple $(x\,;y)$ s'appelle les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\,;\ \vec{j})$.

Afin de ne pas confondre les coordonnées des points et celles des vecteurs, on notera en colonne les coordonnées d'un vecteur : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Illustration :

Exemple

Construire un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\,;\ \vec{j})$ du plan, puis construire le représentant d'origine O du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\,;\ \vec{j})$ un repère du plan. Si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Propriété XXL (expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé)

Soit $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ un *repère orthonormé.*

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. ♥♥♥♥♥ $\vec{u}\,.\,\vec{v} =$ ♥♥♥♥♥

Preuve :

✂ -

Conséquences importantes de la propriété XXL :

- ✓ *Si* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, **alors :** $\|\vec{u}\| =$ (expression analytique de la norme).
- ✓ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si :

Exercice 3 ***(très important)***

Soit $A(1\ ;\ 2)$, $B(-1\ ;\ 1)$ et $C(3\ ;\ 5)$ des points d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$.

a) Calculer la valeur de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. En déduire que le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

b) Calculer la valeur exacte de chacune des longueurs AB et AC.

c) En déduire une mesure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ arrondie au degré près.

d) Soit D(5 ; -6). Démontrer que le triangle ABD est rectangle en A.

✂--

Exercice 4

Soit $A(-2\ ;\ 3)$, $B(7\ ;\ 0)$, $C(4\ ;\ 5)$ et $D(2\ ;-1)$ des points d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$.

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

✂--

Exercice 5

Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Soit I le milieu du segment $[AB]$, et J celui de $[BC]$.
Démontrer que les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.

✂--

III- Propriétés algébriques du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan :

1) Symétrie du produit scalaire

$\vec{u}.\vec{v} =$ ....

2) Bilinéarité (= distributivité) du produit scalaire

$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) =$ ....

$(\vec{v} + \vec{w}).\vec{u} =$ ....

Pour tout réel k, $(k\vec{u}).\vec{v} =$ .... = ...

3) Identités remarquables

Identité remarquable numéro 1

♥♥♥♥♥ $(\vec{u}+\vec{v})^2 =$ .... ♥♥♥♥♥

En particulier, on a :

Identité remarquable numéro 2

♥♥♥♥♥ $(\vec{u}-\vec{v})^2 =$ .... ♥♥♥♥♥

En particulier on a :

Identité remarquable numéro 3

♥♥♥♥♥ $\vec{u}^2-\vec{v}^2 =$ .... ♥♥♥♥♥

Preuve :

Exercice 6

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

Calculer :

a) $\vec{u}.\vec{v}$; *b)* $2\vec{u}.\vec{v}$; *c)* $\vec{u}.\vec{w}$; *d)* $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})$; *e)* $\|\vec{u}+2\vec{v}\|$; *f)* $-5\vec{u}.\vec{v}$; g) $\vec{v}^{\,2}$

✂--

Exercice 7

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = 6$.

a) Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ puis en déduire la valeur de $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

b) Calculer la valeur de $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.

c) Calculer la valeur de : $\vec{u}.(\vec{v}-2\vec{u})$.

✂ ---

Exercice 8

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de même norme.

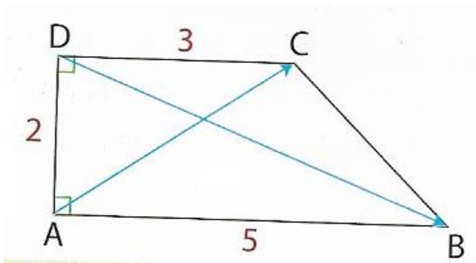
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux.

2) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Démontrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

✂ ---

Exercice 9

ABCD est le trapèze rectangle ci-contre tel que :
$AB = 5$, $AD = 2$ et $CD = 3$.



En utilisant la relation de Chasles ainsi que les propriétés du produit scalaire, calculer la valeur de :

.

✂ ---

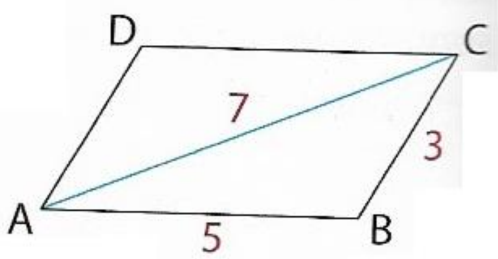
Exercice 10

ABCD est un parallélogramme tel que : $AB = 5$, $BC = 3$ et $AC = 7$.

Calculer :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

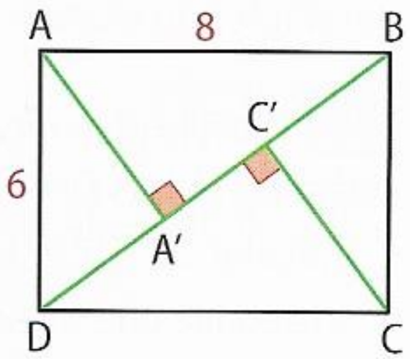


✂ --

Exercice 11

ABCD est un rectangle tel que :
$AB = 8$ et $AD = 6$.

On note A′ et C′ les projetés orthogonaux de A et C sur [DB].



1. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ avec la relation de Chasles en faisant apparaître le vecteur $\overrightarrow{A'C'}$.

2. a. Montrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD}$.

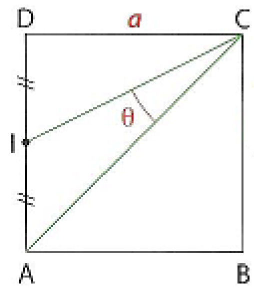
b. Montrer que $AD^2 - AB^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

3. Déduire des questions précédentes la longueur du segment [A′C′].

✂ --

Exercice 12

ABCD est un carré de côté a. I est le milieu du segment [AD]. On veut démontrer que la mesure θ de l'angle $\widehat{ACI}$ est indépendante de a.



1. a) Calculez CI et CA en fonction de a.

b) Déduisez-en que :

$$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{a^2\sqrt{10}}{2} \cos \theta.$$

2. a) Exprimez $\overrightarrow{CI}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CB}$.

b) Déduisez-en que $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}a^2$.

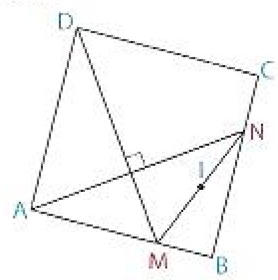
3. Calculez $\cos \theta$ et concluez.

Exercice 13

Soit ABCD un carré de côté 1, et M un point quelconque du côté [AB].

La perpendiculaire à la droite (DM) passant par A et [BC] se coupent en N.

On note I le milieu du segment [MN].



On se place dans le repère orthonormé (A ; B ; D).

On note x l'abscisse de M, avec $0 \leq x \leq 1$.

a) Donner, sans justifier, les coordonnées des points *A, B, C, D* et *M* dans ce repère.

b) On note N(α ; β). Combien vaut l'abscisse α du point N ? Pourquoi ?

c) Exprimer de deux façons différentes $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{DM}$, puis en déduire que $\beta = x$.

d) En déduire les coordonnées du point I en fonction de x.

e) Lorsque M parcourt le segment [AB], démontrer que le point I parcourt une figure simple de la géométrie que l'on caractérisera.

IV – Produit scalaire et projection orthogonale

On rappelle que le projeté orthogonal d'un point C sur une droite (AB) est le point d'intersection de la droite (AB) et de la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point C.

Illustration :

Propriété

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs, et soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

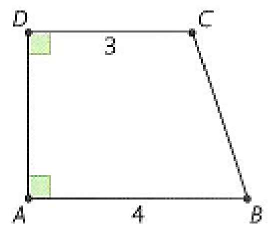
Alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$

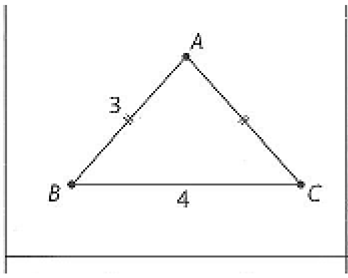
Illustration et preuve :

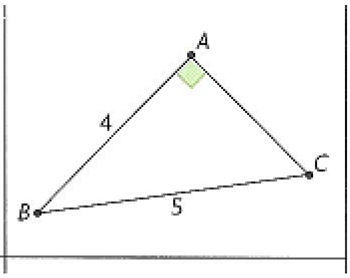
Remarque : Cette propriété servira souvent, surtout en géométrie.

Exercice 14

1) Calculer, dans chacune des figures suivantes, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:





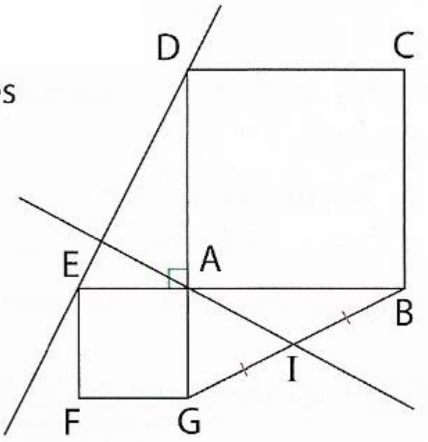


2) Déterminer de même la valeur de $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}$, où IJKL est un losange de centre O dont la diagonale [IK] mesure 20 cm.

✂ -

Exercice 15

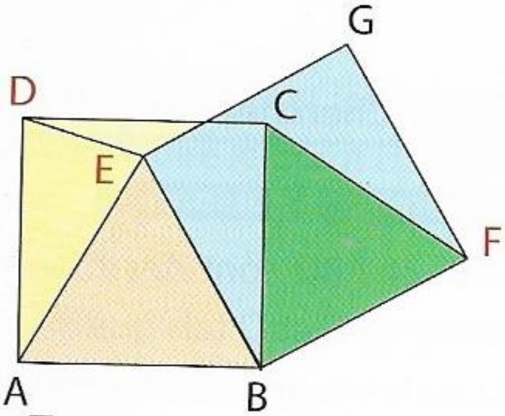
ABCD et AEFG sont les carrés tracés ci-contre tels que $\widehat{EAD} = 90°$.
I est le milieu du segment [BG].
Démontrer que les droites (IA) et (ED) sont perpendiculaires.



✂ -

Exercice 16

Sur cette figure, ABCD est un carré de côté 1, ABE est un triangle équilatéral et BFGE est un carré.



a) Montrer que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et en déduire $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BE}$.

b) Calculer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}$.

c) Démontrer que le triangle BFC est équilatéral.

d) En déduire $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF}$ puis $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EG}$.

e) Justifier que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EG} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

f) En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BG}$ à l'aide de la relation de Chasles, calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BG}$.

g) En déduire l'alignement des points D, E et F.

Exercice 17

Soit ABC un triangle.

a) En utilisant la relation de Chasles, et en exprimant $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MA}$, établir que pour tout point M du plan, on a la relation suivante notée (*) : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

b) On appelle H le point d'intersection des hauteurs respectivement issues de A et B du triangle ABC.

Ecrire la relation (*) appliquée au point H, puis prouver que H appartient à la hauteur issue de C du triangle ABC.

En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Point culture : le point d'intersection des trois hauteurs d'un triangle est appelé l'***orthocentre*** du triangle.

✂---

Exercice 18

Soit ABC un triangle (non aplati) et *(d)* la droite parallèle à (AB) passant par le point C.

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des points décrit par l'orthocentre H du triangle ABC lorsque le point C parcourt la droite *(d)*.

1a) A l'aide de *Geogebra*, réaliser une figure. On créera un curseur pour le point C.

1b) Faire afficher la trace du point H lorsque C parcourt la droite *(d)*. Conjecturer la nature de la courbe décrite par l'ensemble des points H.

2) On se propose de prouver la conjecture faite en *1)*.

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ tel que O est le milieu de [AB], et l'axe des abscisses est la droite (AB).

Ainsi, les points A et B ont pour coordonnées dans ce repère : $A(a\ ;\ 0)$ et $B(-a\ ;\ 0)$ avec a réel non nul.

0) Pourquoi a est-il non nul ?

1) La droite *(d)* est parallèle à l'axe des abscisses, elle admet donc pour équation : $y = c$, où c est un réel non nul.

On note x l'abscisse du point C.

a) Déterminer l'ordonnée de C, ainsi que l'abscisse de H.

b) On note y l'ordonnée du point H. En utilisant $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}$, exprimer y en fonction de a et c.

c) En déduire les coordonnées du point H, puis que lorsque C parcourt la droite *(d)*, le point H décrit une parabole dont on précisera les coordonnées du sommet S.

d) Quelle est la nature du triangle ABC lorsque le point H est situé au sommet S de cette parabole ?

Exercice 19

Voici un exercice sublime :

On se place dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on note $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation : $y = \frac{1}{x}$.

A-Conjecture : à l'aide de *Geogebra*, construire l'hyperbole $\mathscr{H}$, et placer trois points A, B et C deux à deux distincts sur $\mathscr{H}$, puis construire le triangle ABC ainsi que l'orthocentre de ce dernier que l'on nommera H. Faire bouger les points A, B et C sur $\mathscr{H}$. Quelle conjecture pouvez-vous faire concernant le point H ?

B-Démonstration

Soit A, B et C trois points distincts situés sur $\mathscr{H}$ d'abscisses respectives a, b et c.

1) On note H l'orthocentre du triangle ABC, et on note x et y les coordonnées de H : H$(x\,;y)$.

Les questions suivantes sont dévolues à prouver que H appartient à $\mathscr{H}$, quelle que soit la position des points A, B et C situés sur $\mathscr{H}$.

a) Prouver que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire au vecteur, où $\vec{u}\begin{pmatrix} ac \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Pourquoi a-t-on : $\vec{u}.\overrightarrow{BH} = 0$? En déduire une équation de (BH) ; vérifier que cette dernière s'écrit sous la forme : $acx - y = abc - \frac{1}{b}$.

c) Démontrer de façon analogue qu'une équation de la hauteur issue de C du triangle ABC est : $abx - y = abc - \frac{1}{c}$.

d) En déduire les coordonnées du point H que l'on exprimera en fonction de a, b et c uniquement.

e) Démontrer que H est un point situé sur $\mathscr{H}$ et conclure quant au problème posé dans ce très joli exercice !