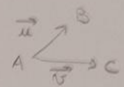
CHAPITRE VIII LE PRODUIT SCALAIRE ET SES APPLICATIONS

I – Généralités sur le produit scalaire

Définition du produit scalaire



✓ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Il existe des points A, B et C du plan tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$, est le nombre réel, noté $\vec{u}.\vec{v}$ (lire : "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$"), et défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

✓ Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Remarques

1) Le nom produit scalaire ne doit pas faire croire qu'on fait un produit (au sens multiplication) de vecteurs !
Le produit scalaire de deux vecteurs est toujours un nombre réel.

2) On appelle ***carré scalaire*** du vecteur $\vec{u}$, le réel $\vec{u}.\vec{u}$ noté $\vec{u}^{\,2}$.

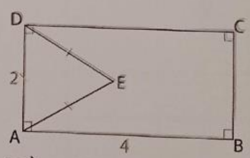
On a : $\vec{u}^{\,2} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB \times AB \times \cos(0) = AB \times AB \times 1 = AB^2$.

↳ carré scalaire de $\vec{u}$

3) La longueur AB est encore appelée la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et notée : $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Exercice 1

ABCD est un rectangle tel que AB = 4 et AD = 2.
AED est un triangle équilatéral situé à l'intérieur de ABCD.
a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD}$.
b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AE}$.



c) Calculer les produits scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

a) $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} = AE \times AD \times \cos(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}) = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ car AED est équilatéral

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} = 4 \times \frac{1}{2} = 2.$

b) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = AB \times AE \times \cos(\widehat{BAE})$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AE} = 4 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ car $\widehat{BAE} = 90° - 60° = 30° = \frac{\pi}{6}$ rad.

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AE} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

e) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 4 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}^2 = AD^2 = 2^2 = 4$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(-\overrightarrow{AB}) = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|-\overrightarrow{AB}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}; -\overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 4 \times 4 \times \cos(\pi)$ car $(\overrightarrow{AB}; -\overrightarrow{AB}) = 180°$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 16 \times (-1) = -16.$

Exercice 2

Vincent s'initie au kitesurf. Il se déplace en ligne droite d'un point A à un point B sur une distance de 50 m. La force de traction $\vec{F}$ exercée par la voile a pour intensité 1 000 newtons ($\|\vec{F}\| = 1000$).
En physique, le travail de la force $\vec{F}$ lors du déplacement de A en B est le nombre, noté W, tel que $W = AB \times \|\vec{F}\| \times \cos(\widehat{BAC})$.
L'unité du travail est le joule (noté J).

1 a) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous à l'aide de valeurs exactes.

$\widehat{BAC}$	0°	30°	45°	60°	120°
W	50 000	$25000\sqrt{3}$	$25000\sqrt{2}$	25 000	−25 000

b) Louise affirme : « Si le vecteur $\vec{F}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $\vec{F}$ n'influence pas le déplacement. » Est-ce exact ?

2 a) Étudier le signe de W en fonction de la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.
b) Les physiciens parlent de travail résistant lorsque $W < 0$. Justifier le vocabulaire.
W est appelé produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur $\vec{F}$ et se note $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{F}$.

1. a) • Si $\widehat{BAC} = 30° = \frac{\pi}{6}$ rad.

$W = 50000 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 50000 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 25000\sqrt{3}$

• Si $\widehat{BAC} = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad.

$W = 50000 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 50000 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 25000\sqrt{2}$

• $W = 25000$

Or $W = 50000 \cos(\widehat{BAC})$

$25000 = 50000 \cos(\widehat{BAC})$

Donc $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{25000}{50000} = \frac{1}{2}$.

Donc comme $0 \leq \widehat{BAC} \leq \pi$, on a : $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ rad

$\widehat{BAC} = 60°$

• Si $\widehat{BAC} = 120° = \frac{2\pi}{3}$, alors $W = 50\,000 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$W = 50\,000 \times \left(\frac{-1}{2}\right)$

$W = -25000$

• $\vec{W}_{A \to B} = \vec{AB} \cdot \vec{F} = AB \times \|\vec{F}\| \times \cos(\widehat{BAC})$

$W = 50 \times 1000 \times \cos(\widehat{BAC})$
$W = 50\,000 \times \cos(\widehat{BAC})$
$W = 50\,000 \times 1 \times \cos(0) = 50\,000$

b) Si $\vec{F}$ est orthogonal au vecteur $\vec{AB}$:
alors $W = 50\,000 \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Louise a donc raison : $W = 0$, donc il n'influence pas le mvt du Kitesurf.

2. a) $W = 50\,000 \times \cos(\widehat{BAC})$
Or $50\,000 > 0$ donc W a le m̂ signe que $\cos(\widehat{BAC})$
Or $0 \leq \widehat{BAC} \leq 180°$.
$0 \leq \widehat{BAC} \leq \pi$ rad.

Si $0 \leq \widehat{BAC} < \frac{\pi}{2}$, alors $\cos(\widehat{BAC}) > 0$ et donc $W > 0$.

**) Si $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$, alors $W = 0$

***) Si $\frac{\pi}{2} < \widehat{BAC} \leq \pi$, alors $\cos(\widehat{BAC}) \leq 0$ et donc $W < 0$.

b) Si $W < 0$: le travail de $\vec{F}$ est "résistant", càd que $\vec{F}$ "contrarie", "ferme", le mvt du kitesurf.

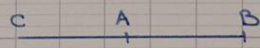
Si $W > 0$, le travail de $\vec{F}$ est "moteur", le "déplacement".

Conséquences de la définition du produit scalaire de deux vecteurs :

- ✓ Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (on dit que le produit scalaire est commutatif, c'est-à-dire que sa valeur est indépendante de l'ordre des vecteurs).
- ✓ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et ont le même sens, alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$ *
- ✓ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$ **

* car : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ avec $\widehat{BAC} = 0$

donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$ et $\cos(0) = 1$



** $\widehat{BAC} = \pi$ rad

or $\cos(\pi) = -1$

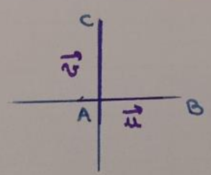
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$

Définition

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux lorsque les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Illustration :



Remarque

Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Théorème : *Le produit scalaire, un puissant outil pour mesurer l'orthogonalité.*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que : $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ ...0...
↳ angle droit

Preuve :

$\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ où : $\vec{u} = \vec{AB}$
$\vec{v} = \vec{BC}$

$\vec{u}.\vec{v} = 0 \iff AB \times AC \times \cos(\widehat{ABC}) = 0$

Or $\vec{u} \neq \vec{v}$, donc $\vec{AB} \neq \vec{0}$ donc $AB \neq 0$
$\vec{v} \neq 0$, donc $\vec{AC} \neq \vec{0}$ donc $AC \neq 0$

$\vec{u}.\vec{v} = 0 \iff \vec{AB} \times \vec{AC} \times \cos(\widehat{BAC}) = 0 \iff \cos(\widehat{BAC}) = 0$

$\vec{u}.\vec{v} = 0 \iff \widehat{BAC}$ est un angle droit, càd $(\vec{AB}\,;\vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{AB}\,;\vec{AC}) = -\frac{\pi}{2}$.

Exemple

Soient A et B deux points, et C un point appartenant au cercle de diamètre AB.

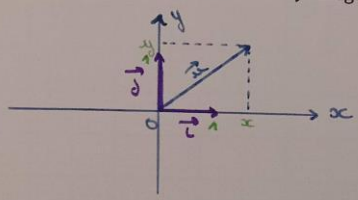
Déterminer la valeur de $\vec{CA}.\vec{CB}$. → voir p. suivante

II- Calcul du produit scalaire dans un repère orthonormé

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\,;\ \vec{j})$ un repère orthonormée du plan, c'est-à-dire qu'on se donne un point O appelé origine du repère, et un couple de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ orthogonaux et de norme égale à 1.

Le vecteur $\vec{i}$ dirige l'axe des abscisses et le vecteur $\vec{j}$ dirige l'axe des ordonnées.

Illustration :

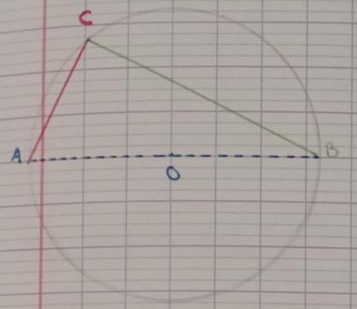


$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose sous la forme unique : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$: le couple $(x\,;y)$ s'appelle les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\,;\ \vec{j})$.

Afin de ne pas confondre les coordonnées des points et celles des vecteurs, on notera en colonne les coordonnées d'un vecteur : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemple

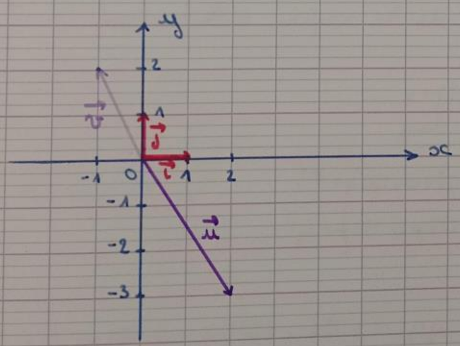


C appartient au cercle de diamètre AB, donc le triangle CAB est rectangle en C.

Donc $\widehat{CAB} = 90°$, et par suite :
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos(\widehat{CAB}) = 0$

Exemple

Construire un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ du plan, puis construire le représentant d'origine O du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$. $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$



Soit $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ un repère du plan. Si $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$

Propriété XXL *(expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé)*

Soit $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ un ***repère orthonormé.***

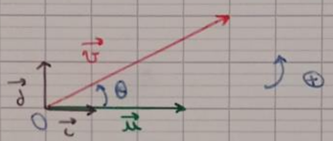
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. ♥♥♥♥♥ $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$ ♥♥♥♥♥

Preuve :

Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, c'est évident.

Donc on suppose que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

Fabriquons à partir de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ un repère orthonormé :



Soit $\begin{cases} \vec{i} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} : \vec{i} \text{ est un vecteur de norme } 1. \\ \vec{j} \text{ le vecteur unitaire d'origine O tel que } (\vec{i}\,;\vec{j}) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Plaçons nous ds le repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$:

On a : $\vec{u}\begin{pmatrix}\|\vec{u}\| \\ 0\end{pmatrix} \begin{matrix}\to x \\ \to y\end{matrix}$

et $\vec{v}\begin{pmatrix}\|\vec{v}\|\cos(\theta) \\ \|\vec{v}\|\sin(\theta)\end{pmatrix} \begin{matrix}\to x' \\ \to y'\end{matrix}$

Donc : $xx' + yy' = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta) + 0 \times \|\vec{v}\|\sin(\theta)$

$xx' + yy' = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta) = \vec{u}\cdot\vec{v}$

On admet que cette relation reste vraie quel que soit le repère orthonormé choisi.

Conséquences importantes de la propriété XXL :

✓ *Si* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (expression analytique de la norme).

✓ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si : $\vec{u} . \vec{v} = 0$ ssi $xx' + yy' = 0$

Exercice 3 *(très important)*

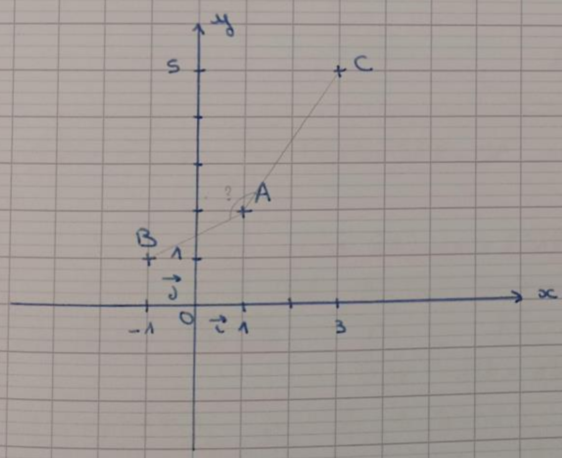
Soit $A(1\ ;\ 2)$, $B(-1\ ;\ 1)$ et $C(3\ ;\ 5)$ des points d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

a) Calculer la valeur de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. En déduire que le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

b) Calculer la valeur exacte de chacune des longueurs AB et AC.

c) En déduire une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ arrondie au degré près.

d) Soit $D(5\ ;\ -6)$. Démontrer que le triangle ABD est rectangle en A.



a) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = -1-1 = -2 \\ y_B - y_A = 1-2 = -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A = 3-1 = 2 \\ y_C - y_A = 5-2 = 3 \end{pmatrix}$

Donc $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Par suite : $\vec{AB}.\vec{AC} = xx' + yy' = -2 \times 2 + (-1) \times 3 = -4 - 3 = -7$.

Si ABC était un triangle rectangle en A alors on aurait :
$\vec{AB} \perp \vec{AC}$ et donc par propriété :
$\vec{AB}.\vec{AC} = 0$ ce qui n'est pas le cas ici : $\vec{AB}.\vec{AC} = -7$.

Donc ABC n'est pas rectangle en A.

b) Rappel : $AB = \|\vec{AB}\|$

Or $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\|\vec{AB}\| = \sqrt{x_{\vec{AB}}^2 + y_{\vec{AB}}^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ u.l.

De m : $AC = \|\vec{AC}\|$

Or $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, donc $AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ u.l.

c) $\vec{AB}.\vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\vec{AB}; \vec{AC})$
$-7 = \sqrt{5} \times \sqrt{13} \times \cos(\vec{AB}; \vec{AC})$
$\cos(\vec{AB}; \vec{AC}) = \dfrac{-7}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}} = \dfrac{-7}{\sqrt{65}}$.

Grâce à la calculatrice : $\arccos\left(\dfrac{-7}{\sqrt{65}}\right) \approx 150°$.

Donc $(\vec{AB}; \vec{AC}) \approx 150°$.

d) On calcule le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{AD}$ dans le but d'obtenir 0 !

Or $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix}5-1=4\\-6-2=-8\end{pmatrix}$.

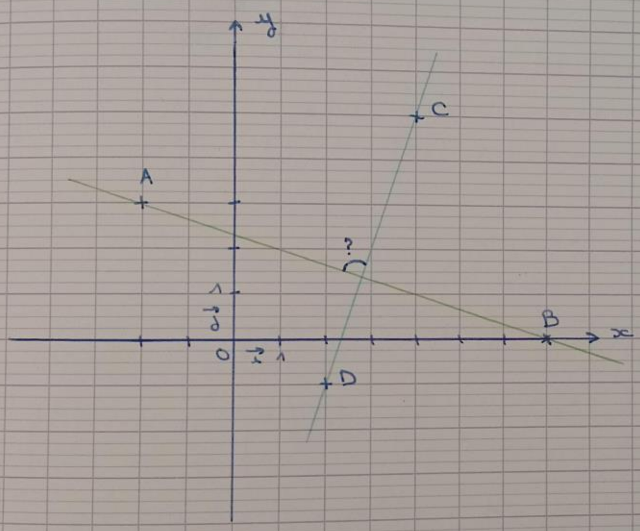
Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = xx' + yy' = -2 \times 4 + (-1) \times (-8) = -8 + 8 = 0.$

Donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$, donc le triangle ABD est rectangle en A.

Exercice 4

Soit $A(-2\ ;\ 3)$, $B(7\ ;\ 0)$, $C(4\ ;\ 5)$ et $D(2\ ;-1)$ des points d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$.

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.



Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$:

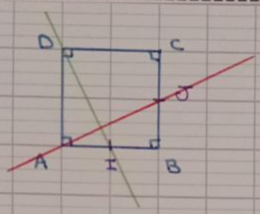
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7+2=9 \\ 0-3=-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2-4=-2 \\ -1-5=-6 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = xx' + yy' = 9 \times (-2) + (-3) \times (-6) = -18 + 18 = 0.$

Donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$, donc (AB) et (CD) qui sont dirigées par ces vecteurs sont perpendiculaires.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Soit I le milieu du segment $[AB]$, et J celui de $[BC]$.
Démontrer que les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.



Plaçons-nous dans le repère : $(A ; \vec{AB} ; \vec{AD})$ c'est un repère orthonormé car ABCD est un carré

Calculons le $\vec{DI} \cdot \vec{AJ}$:

Au préalable : $A(0;0)$; $D(0;1)$; $B(1;0)$; $C(1;1)$

Donc comme I = milieu de $[AB]$, $I\left(\frac{0+1}{2} ; \frac{0+0}{2}\right)$

Donc $I\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

J est le milieu de $[BC]$, donc $J\left(1 ; \frac{1}{2}\right)$.

Donc $\vec{DI}\begin{pmatrix} x_I - x_D = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \\ y_I - y_D = 0 - 1 = -1 \end{pmatrix}$: $\vec{DI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AJ}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$\vec{DI} \cdot \vec{AJ} = xx' + yy' = \frac{1}{2} \times 1 + (-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Donc $\vec{DI}$ et $\vec{AJ}$ sont orthonormaux et par suite les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.

III- Propriétés algébriques du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ du plan :

1) Symétrie du produit scalaire

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

2) Bilinéarité (= distributivité) du produit scalaire

$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$......

$(\vec{v} + \vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u}$....

Pour tout réel k, $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}.(k\vec{v})$

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un R.O.N.

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

1) $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ et $\vec{v}.\vec{u} = x'x + yy'$

Or le produit des réels et commutatif donc $\begin{cases} x'x = xx' \\ y'y = yy' \end{cases}$

Donc $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

2) $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ donc $\vec{v} + \vec{w}\begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix}$

Donc $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}+\vec{w}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}+\vec{w}}$

$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'')$

Donc $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = xx' + xx'' + yy' + yy''$

$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = (xx' + xx'') + (yy' + yy'')$

$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

III- Propriétés algébriques du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan :

1) Symétrie du produit scalaire

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

2) Bilinéarité (= distributivité) du produit scalaire

$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$......

$(\vec{v}+\vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u}$....

Pour tout réel k, $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}.(k\vec{v})$

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un R.O.N.

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

1) $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ et $\vec{v}.\vec{u} = x'x + y'y$

Or le produit des réels et commutatif donc $\begin{cases} x'x = xx' \\ y'y = yy' \end{cases}$

Donc $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

2) $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ donc $\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}x'+x''\\y'+y''\end{pmatrix}$

Donc $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}+\vec{w}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}+\vec{w}}$

$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = x(x'+x'') + y(y'+y'')$

Donc $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = xx' + xx'' + yy' + yy''$

$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = (xx' + xx'') + (yy' + yy'')$

$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

3) Identités remarquables

Identité remarquable numéro 1

♥♥♥♥♥ $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$ ♥♥♥♥♥

En particulier, on a : $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}^2$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$

Identité remarquable numéro 2

♥♥♥♥♥ $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$ ♥♥♥♥♥

En particulier on a : $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}^2$

Identité remarquable numéro 3 $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$

♥♥♥♥♥ $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$ ♥♥♥♥♥

Preuve :

1. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = (\vec{u}+\vec{v}).\vec{u} + (\vec{u}+\vec{v}).\vec{v}$

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$

$(\vec{u}.\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

Idem pour 2. et 3.

Exercice 7

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = 6$.

a) Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ puis en déduire la valeur de $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

b) Calculer la valeur de $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.

c) Calculer la valeur de : $\vec{u}.(\vec{v}-2\vec{u})$.

a) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 4^2 + 2\times 6 + 3^2 = 16 + 12 + 9 = 37.$

Donc comme $\|\vec{u}+\vec{v}\| \geqslant 0$, on a $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{37}$.

b) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4^2 - 2\times 6 + 3^2 = 16 - 12 + 9 = 13$

Donc $\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{13}$.

c) $\vec{u}.(\vec{v}-2\vec{u}) = \vec{u}.\vec{v} - \vec{u}.2\vec{u} = \vec{u}.\vec{v} - 2\times\vec{u}.\vec{u} = 6 - 2\times\|\vec{u}\|^2$

$\vec{u}.(\vec{v}-2\vec{u}) = 6 - 2\times 4^2 = 6 - 32 = -26.$

Exercice 6

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

Calculer : a) $\vec{u}.\vec{v}$ b) $2\vec{u}.\vec{v}$ c) $\vec{u}.\vec{w}$ d) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})$
e) $\|\vec{u}+2\vec{v}\|$ f) $-5\vec{u}.\vec{v}$ g) $\vec{v}^2$

---

a) $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = 2\times(-5) + (-3)\times 1 = -10 + (-3) = -13.$

b) $2\vec{u}.\vec{v} = 2\times\vec{u}.\vec{v} = 2\times(-13) = -26.$

c) $\vec{u}.\vec{w} = xx' + yy' = 2\times 4 + (-3)\times 2 = 8 - 6 = 2$

d) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} = -13 + 2 = -11.$

e) Rappel : Si $\vec{a}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors $\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Donc ici : $\vec{u}+2\vec{v} = \vec{a}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ donc $2\vec{v}\begin{pmatrix}-10\\2\end{pmatrix}$

Donc $\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix}2+(-10)=-8\\-3+2=1\end{pmatrix}$

Donc $\|\vec{a}\| = \|\vec{u}+2\vec{v}\| = \sqrt{(-8)^2+1^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}.$

f) $-5\vec{u}.\vec{v} = -5\times\vec{u}.\vec{v} = -5\times(-13) = 65.$

g) $\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = (-5)^2 + 1^2 = 25 + 1 = 26.$

Exercice 8

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de même norme.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux.

2) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Démontrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

1) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

Calculons le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ dans le but ici d'obtenir 0.

Or $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Or par hypothèse, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, donc $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$, donc $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$.

Ainsi : $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = 0$, donc $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux.

2) De façon générale : $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ est faux !

On veut que : $\underbrace{\|\vec{u}+\vec{v}\|}_{\geq 0} = \underbrace{\underbrace{\|\vec{u}\|}_{\geq 0} + \underbrace{\|\vec{v}\|}_{\geq 0}}_{\geq 0}$

Or en algèbre : a et b étant positifs, $a = b$ équivaut à dire que $a^2 = b^2$.

Donc cela équivaut à : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$

IR1 pr les réels

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$$

IR1 pr vecteurs

$$\cancel{\vec{u}^2} + 2\vec{u}.\vec{v} + \cancel{\vec{v}^2} = \cancel{\vec{u}^2} + 2\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| + \cancel{\vec{v}^2}$$

$$2\vec{u}.\vec{v} = 2\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Or $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$

Donc : $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Or $\vec{u} \neq \vec{0}$, donc $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, donc $\|\vec{v}\| \neq 0$.

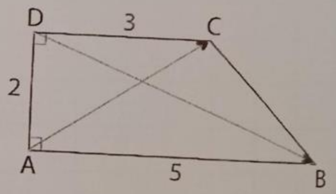
On simplifie par $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$:

$\cos(\vec{u} ; \vec{v}) = 1 \iff \cos(\vec{u} ; \vec{v}) = \cos(0)$

$\iff (\vec{u} ; \vec{v}) = 0 + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$\iff$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de m̂ sens.

Exercice 9



ABCD est le trapèze rectangle ci-contre tel que :

$AB = 5$, $AD = 2$ et $CD = 3$.

En utilisant la relation de Chasles ainsi que les propriétés du produit scalaire, calculer la valeur de : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.

Avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$ car $(DC) \perp (DA)$, et $(AD) \perp (AB)$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} + \|\overrightarrow{DC}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos(\overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -\|\overrightarrow{DA}\|^2 + 3 \times 5 \times \cos(0)$ car $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de m̂ sens

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -2^2 + 15 \times 1 = -4 + 15 = 11$.

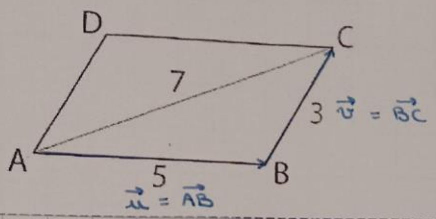
Exercice 10

ABCD est un parallélogramme tel que : $AB = 5$, $BC = 3$ et $AC = 7$.

Calculer :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v}$

Rappel : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

Donc $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Donc $2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$

Ds l'exo ici : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ avec $\|\vec{u}\| = 5$

$\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ avec $\|\vec{v}\| = 3$

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ avec $AC = 7$ donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 7$.

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[7^2 - 5^2 - 3^2\right] = \frac{1}{2}(49 - 25 - 9) = \frac{15}{2}$.

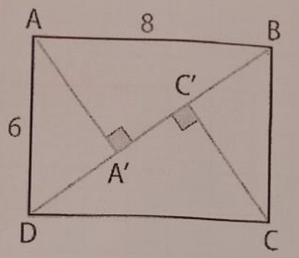
Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5^2 + \frac{15}{2} = 25 + \frac{15}{2} = 32,5$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ car $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ vu que ABCD est un pgm.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{15}{2}$.

Exercice 11

ABCD est un rectangle tel que :
$AB = 8$ et $AD = 6$.
On note A′ et C′ les projetés orthogonaux de A et C sur [DB].



1. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ avec la relation de Chasles en faisant apparaître le vecteur $\overrightarrow{A'C'}$.
2. a. Montrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD}$.
b. Montrer que $AD^2 - AB^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.
3. Déduire des questions précédentes la longueur du segment [A′C′].

---

1. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{CC'}$

2. a. $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{CC'}) . \overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} . \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BD} . \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{BD} . \overrightarrow{CC'}$
$\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'} . \overrightarrow{BD}$

b. $AD^2 - AB^2 = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) . (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$
$AD^2 - AB^2 = \overrightarrow{AC} . (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD}$

3. Grâce à q.2.b : $6^2 - 8^2 = \overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD}$
$36 - 64 = \overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD} = -28$

Or d'après 2a., $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'} . \overrightarrow{BD}$
Donc $-28 = \underbrace{\overrightarrow{A'C'} . \overrightarrow{BD}}$
colinéaires de sens opposés

$-28 = \|\overrightarrow{A'C'}\| \times \|\overrightarrow{BD}\| \times \cos(\overrightarrow{A'C'} ; \overrightarrow{BD})$
$-28 = A'C' \times BD \times \cos(\pi)$
$-28 = A'C' \times BD \times -1$
$A'C' \times BD = 28$

Or $BD = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$

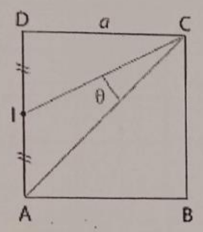
$A'C' \times 10 = 28$

$A'C' = \frac{28}{10}$

$A'C' = 2{,}8$

Exercice 12

ABCD est un carré de côté a. I est le milieu du segment [AD]. On veut démontrer que la mesure θ de l'angle $\widehat{ACI}$ est indépendante de a.



1. a) Calculez CI et CA en fonction de a.

b) Déduisez-en que :

$$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA} = \frac{a^2\sqrt{10}}{2}\cos\theta.$$

2. a) Exprimez $\overrightarrow{CI}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CB}$.

b) Déduisez-en que $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}a^2$.

3. Calculez $\cos\theta$ et concluez.

1\. a) Dans le triangle DIC rectangle en D, le th. de Pythagore dit :

$CI^2 = CD^2 + DI^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$CI^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$

Or $CI > 0$, donc $CI = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{a^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\times a.$

b) De même, $CA = \sqrt{2}\times a.$

$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \|\overrightarrow{CI}\| \times \|\overrightarrow{CA}\| \times \cos(\theta)$

$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \frac{\sqrt{5}}{2}\times a \times \sqrt{2} \times a \times \cos(\theta)$

$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \frac{\sqrt{10}}{2}\times a^2 \times \cos(\theta) = \frac{a^2\sqrt{10}}{2}\cos(\theta).$

2. a) $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI}$

$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \left(\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = CA \times CD \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} CB \times CA \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ car ABCD est un carré

$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = a \times \sqrt{2} \times a \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times a \times \sqrt{2} \times a \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2 + \frac{1}{2} a^2 = \frac{3}{2} a^2.$

3. $\frac{\sqrt{10}}{2} \times a^2 \times \cos(\theta) = \frac{3}{2} a^2$

Donc $\cos(\theta) = \dfrac{\frac{3}{2} a^2}{\frac{\sqrt{10}}{2} a^2}$ car $a \neq 0$.

$\cos(\theta) = \frac{3}{2} a^2 \times \frac{2}{\sqrt{10}\, a^2} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$: valeur indépendante de a !

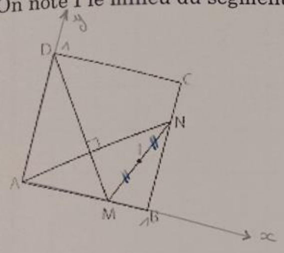
$\theta \approx 18°$

Exercice 13

Soit ABCD un carré de côté 1, et M un point quelconque du côté [AB].

La perpendiculaire à la droite (DM) passant par A et [BC] se coupent en N.

On note I le milieu du segment [MN].



On se place dans le repère orthonormé (A ; B ; D).

On note x l'abscisse de M, avec $0 \leq x \leq 1$.

a) Donner, sans justifier, les coordonnées des points *A*, *B*, *C*, *D* et *M* dans ce repère.

b) On note N(α ; β). Combien vaut l'abscisse α du point N ? Pourquoi ?

c) Exprimer de deux façons différentes $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{DM}$, puis en déduire que $\beta = x$.

d) En déduire les coordonnées du point I en fonction de x.

e) Lorsque M parcourt le segment [AB], démontrer que le point I parcourt une figure simple de la géométrie que l'on caractérisera.

a) $A(0;0)$; $B(1;0)$; $C(1;1)$; $D(0;1)$ et $M(x;0)$.

b) $N(\alpha;\beta)$ avec $\alpha = 1$ car $N \in [BC]$ et $[BC]$ a pour équation $x = 1$, donc $N(1;\beta)$.

c) $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{DM} = xx' + yy'$ avec $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}1\\ \beta\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x\\ -1\end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{DM} = x - \beta$.

Et $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{DM} = 0$ car $(AN) \perp (DM)$

Donc $x - \beta = 0$ donc $\beta = x$.

d) I est le milieu de [MN] avec : $M(x ; 0)$ et $N(1 ; x)$.

Donc $I\left(\frac{x+1}{2} ; \frac{0+x}{2}\right)$

$I\left(\frac{x+1}{2} ; \frac{x}{2}\right)$

e) $I\left(\underbrace{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}_{x_I} ; \underbrace{\frac{x}{2}}_{y_I}\right)$. Donc : $y_I = x_I - \frac{1}{2}$.

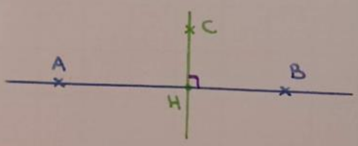
Donc I ∈ à la droite d'équa° : $y = x - \frac{1}{2}$

Or $0 \leq x \leq 1$, donc I parcourt le segment formé par les points $K\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$ et $L\left(1 ; \frac{1}{2}\right)$.

IV – Produit scalaire et projection orthogonale

On rappelle que le projeté orthogonal d'un point C sur une droite (AB) est le point d'intersection de la droite (AB) et de la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point C.

Illustration :



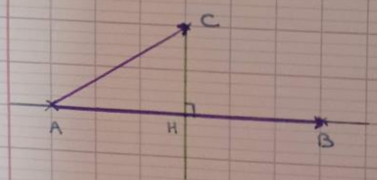
H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Propriété

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs, et soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

Alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Illustration et preuve :



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}}_{=0}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

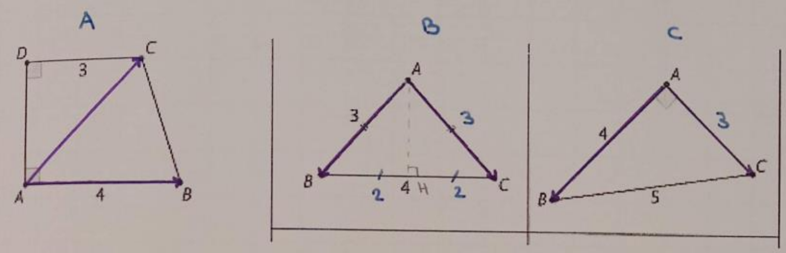
0 par déf° du projeté orthogonal

<u>Intérêt de cette propriété</u> : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires alors que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne le sont nécessairement.

Remarque : Cette propriété servira souvent, surtout en géométrie.

Exercice 14

1) Calculer, dans chacune des figures suivantes, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:



2) Déterminer de même la valeur de $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}$, où IJKL est un losange de centre O dont la diagonale [IK] mesure 20 *cm*.

1) A- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}) = \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}_{0} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$

0 : car $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ st clnr et m̂ sens

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times DC = 4 \times 3 = 12$

B- Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}).(\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH^2 + HB \times HC \times \cos(\pi)$ car $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ st clnr de sens opposés

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH^2 + 2 \times 2 \times (-1) = \underbrace{AH^2 - 4}_{\text{Pythagore}} = 5 - 4 = 1.$

C- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ car ici $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

2)

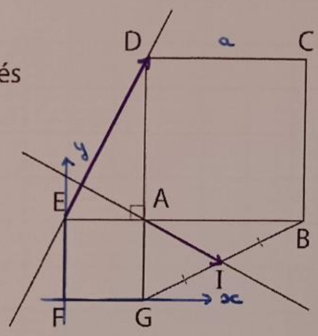
O est le projeté orthogonal de J sur (IK) car IJKL est un losange.

Donc par propriété de projec° orthogonale, on a :

$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{IK} = IO \times IK = 10 \times 20 = 200$

Exercice 15

ABCD et AEFG sont les carrés tracés ci-contre tels que $\widehat{EAD} = 90°$.
I est le milieu du segment [BG].
Démontrer que les droites (IA) et (ED) sont perpendiculaires.



On se place ds le R.O.N. $(F; G; E)$:
soit $a = DC$.
But : montrer que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$.

$G(1; 0)$; $A(1; 1)$; $E(0; 1)$
$B(a+1; 1)$

Donc č I est le milieu de [BG], donc :
$I\left(\frac{a+1+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right)$

$I\left(\frac{a+2}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Enfin : $D(1; a+1)$.

Donc : $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix} 1 - \frac{a+2}{2} = 1 - \left(\frac{a}{2} + 1\right) = -\frac{a}{2} \\ 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

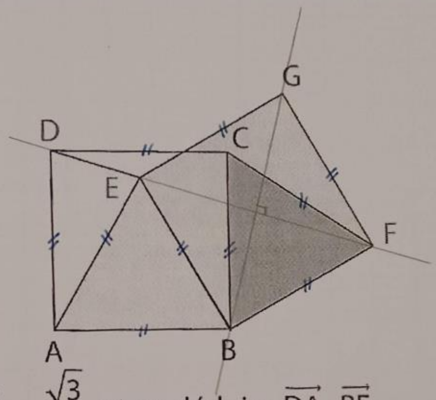
$\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} 1-0=1 \\ a+1-1=a \end{pmatrix}$. Bref : $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$.

Enfin : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{ED} = xx' + yy' = -\frac{a}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times a = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 0.$

Donc $\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{ED}$, et par suite (IA) et (ED) sont perpendiculaires.

Exercice 16

Sur cette figure, ABCD est un carré de côté 1, ABE est un triangle équilatéral et BFGE est un carré.



a) Montrer que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et en déduire $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BE}$.

b) Calculer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}$.

c) Démontrer que le triangle BFC est équilatéral.

d) En déduire $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF}$ puis $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EG}$.

e) Justifier que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

f) En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BG}$ à l'aide de la relation de Chasles, calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BG}$.

g) En déduire l'alignement des points D, E et F.

a) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE} = \|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{BE}\| \times \cos(\widehat{CBE}) = 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Donc $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Or $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$, donc : $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\vec{EA}.\vec{EB} = \|\vec{EA}\| \times \|\vec{EB}\| \times \cos(\widehat{AEB}) = 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

c) $AB = BC = 1$ car $ABCD$ est un carré.
ABE est équilatéral donc $BE = BC = 1$.
Enfin, $BEGF$ est un carré, donc $BE = BF = 1$.

Par suite : $BC = BF = 1$: Donc le triangle BFC est isocèle en B.
Enfin, $\widehat{CBF} = 90° - \widehat{EBC} = 90° - 30° = 60°$.
Or un triangle isocèle qui a un angle de $60°$ est équilatéral.

Donc BFC est équilatéral.

d) $\vec{BC}.\vec{BF} = \vec{EA}.\vec{EB} = \frac{1}{2}$ car les triangles ABE et BCF sont des triangles équilatéraux identiques.

$\vec{DA}.\vec{EG} = \vec{CB}.\vec{BF} = -\vec{BC}.\vec{BF} = -\frac{1}{2}$.

e) $\vec{AE}.\vec{EG} = -\vec{EA}.\vec{EG} = -\|\vec{EA}\| \times \|\vec{EG}\| \times \cos(\widehat{AEG})$
$\vec{AE}.\vec{EG} = -1 \times 1 \times \cos(150°) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

f) $\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AE}$ et $\vec{BG} = \vec{BE} + \vec{EG}$

Donc $\vec{DE}.\vec{BG} = (\vec{DA} + \vec{AE}).(\vec{BE} + \vec{EG})$
$\vec{DE}.\vec{BG} = \vec{DA}.\vec{BE} + \vec{DA}.\vec{EG} + \vec{AE}.\vec{BE} + \vec{AE}.\vec{EG}$
$\vec{DE}.\vec{BG} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{-1}{2}\right) + \vec{EA}.\vec{EB} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\vec{DE}.\vec{BG} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

g) Grâce à f) : $(DE) \perp (BG)$. *
Or $BFGE$ est un carré dt une diagonale est $[BG]$ et l'autre diagonale est $[EF]$.

Par suite : (BG) ⊥ (EF) car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires. **

(*) et (**) font que : (DE) // (EF) (2 ⊥ à une m̂ $3^{ème}$ st //).

De plus E est commun à ces deux droites.
Donc (DE) et (EF) sont confondues et D ∈ (DE) et (DE) = (EF).
Donc D ∈ (EF).

Donc D, E et F sont alignés.

Exercice 17

Soit ABC un triangle.

a) En utilisant la relation de Chasles, et en exprimant $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MA}$, établir que pour tout point M du plan, on a la relation suivante notée (*) : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

b) On appelle H le point d'intersection des hauteurs respectivement issues de A et B du triangle ABC.

Ecrire la relation (*) appliquée au point H, puis prouver que H appartient à la hauteur issue de C du triangle ABC.

En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Point culture : le point d'intersection des trois hauteurs d'un triangle est appelé l'***orthocentre*** du triangle.

a) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$

$S = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB}$

$S = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$S = \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AC})$

$S = \overrightarrow{MA}.\vec{0} + \overrightarrow{AB}.\vec{0} = 0 + 0 = 0.$

b) $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0.$

$\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$ car (HA) ⊥ (BC) car hauteur donc $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$

(HB) ⊥ (CA) par def hauteur donc $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$

Donc (HC) ⊥ (AB).
Par suite (CH) est la troisième hauteur du triangle ABC.
Donc H appartient à cette dernière notée h_C.

Donc h_B, h_A et h_C sont concourantes en H.

Exercice 18

Soit ABC un triangle (non aplati) et *(d)* la droite parallèle à (AB) passant par le point C.

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des points décrit par l'orthocentre H du triangle ABC lorsque le point C parcourt la droite *(d)*.

1a) A l'aide de *Geogebra*, réaliser une figure. On créera un curseur pour le point C.

1b) Faire afficher la trace du point H lorsque C parcourt la droite *(d)*. Conjecturer la nature de la courbe décrite par l'ensemble des points H.

2) On se propose de prouver la conjecture faite en *1)*.

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ tel que O est le milieu de [AB], et l'axe des abscisses est la droite (AB).

Ainsi, les points A et B ont pour coordonnées dans ce repère : $A(a\ ;\ 0)$ et $B(-a\ ;\ 0)$ avec a réel non nul.

0) Pourquoi a est-il non nul ?

1) La droite *(d)* est parallèle à l'axe des abscisses, elle admet donc pour équation : $y = c$, où c est un réel non nul.

On note x l'abscisse du point C.

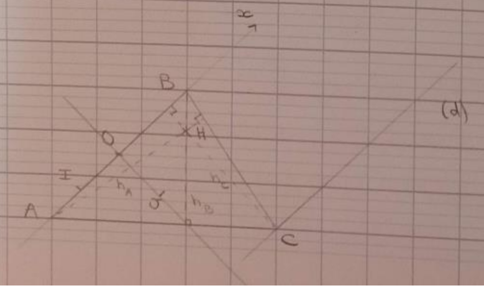
a) Déterminer l'ordonnée de C, ainsi que l'abscisse de H.

b) On note y l'ordonnée du point H. En utilisant $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}$, exprimer y en fonction de a et c.

c) En déduire les coordonnées du point H, puis que lorsque C parcourt la droite *(d)*, le point H décrit une parabole dont on précisera les coordonnées du sommet S.

d) Quelle est la nature du triangle ABC lorsque le point H est situé au sommet S de cette parabole ?

1a)



1b) Il semblerait que H parcoure un arc de parabole.

2) R.O.N $(O ; I ; J)$ où $\vec{OI} = \dfrac{\vec{OB}}{\|\vec{OB}\|}$ et $\vec{OJ} \perp \vec{OI}$ et $\|\vec{OJ}\| = 1$.

0) Si $a = 0$, alors A et B seraient confondus (car m̂ coordonnées)
donc ABC serait aplati ce qui n'est pas le cas !
Donc $a \neq 0$.

1) (d) a pour équa° réduite : $y = c$.
Soit x l'abscisse du point C.

a) $y_C = c$ car $C \in (d)$!

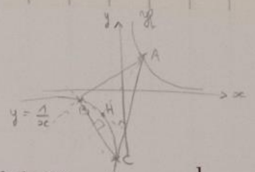
Donc $C(x ; c)$, et l'abscisse H est égale à celle du point C car $(CH) \perp (AB)$, donc (CH) est "verticale". Donc abscisse de $H = x$

b) Soit y l'ordonnée de H : $H(x ; y)$.

$\vec{BH} \begin{pmatrix} x+a \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} x-a \\ c \end{pmatrix}$.

Donc $\vec{BH} \cdot \vec{AC} = xx' + yy' = (x+a)(x-a) + yc = x^2 - a^2 + yc$

Exercice 19



Voici un exercice sublime :

On se place dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on note $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation : $y = \frac{1}{x}$.

A-Conjecture : à l'aide de *Geogebra*, construire l'hyperbole $\mathscr{H}$, et placer trois points A, B et C deux à deux distincts sur $\mathscr{H}$, puis construire le triangle ABC ainsi que l'orthocentre de ce dernier que l'on nommera H. Faire bouger les points A, B et C sur $\mathscr{H}$. Quelle conjecture pouvez-vous faire concernant le point H ?

B-Démonstration

Soit A, B et C trois points distincts situés sur $\mathscr{H}$ d'abscisses respectives a, b et c.

1) On note H l'orthocentre du triangle ABC, et on note x et y les coordonnées de H : H$(x\,;y)$.

Les questions suivantes sont dévolues à prouver que H appartient à $\mathscr{H}$, quelle que soit la position des points A, B et C situés sur $\mathscr{H}$.

a) Prouver que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire au vecteur, où $\vec{u}\begin{pmatrix} ac \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Pourquoi a-t-on : $\vec{u}.\overrightarrow{BH} = 0$? En déduire une équation de (BH) ; vérifier que cette dernière s'écrit sous la forme : $acx - y = abc - \frac{1}{b}$.

c) Démontrer de façon analogue qu'une équation de la hauteur issue de C du triangle ABC est : $abx - y = abc - \frac{1}{c}$.

d) En déduire les coordonnées du point H que l'on exprimera en fonction de a, b et c uniquement.

e) Démontrer que H est un point situé sur $\mathscr{H}$ et conclure quant au problème posé dans ce très joli exercice !

A- Conjecture : $H \in \mathcal{H}$

B- Démonstration

1) $H(x; y)$

$A(a; \frac{1}{a})$ car $A \in \mathcal{H}$

$B(b; \frac{1}{b})$ car $B \in \mathcal{H}$

$C(c; \frac{1}{c})$ car $C \in \mathcal{H}$

a) $\vec{AC}\begin{pmatrix} c-a \\ \frac{1}{c}-\frac{1}{a} \end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix} c-a \\ \frac{a}{ca}-\frac{c}{ca} \end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix} c-a \\ \frac{a-c}{ca} \end{pmatrix}$

Rappel : Deux vecteurs st dn si ils ont des coordonnées prop.

Testons si les produits en croix st égaux ou non :

Or $(c-a)\times(-1) = -c+a = a-c$

et $\frac{a-c}{ac}\times ac = a-c$

Donc les produits en croix st égaux donc $\vec{AC}$ et $\vec{u}$ st clnr.

b) $\vec{u}$ dirige $(\vec{AC})$ car $\vec{u}$ et $\vec{AC}$ st clnr.

Or $(AC)\perp(BH)$ par déf° de l'orthocentre.

Donc $\vec{u}\perp\vec{BH}$ donc $\vec{u}.\vec{BH}=0$.

$\vec{u}\begin{pmatrix} ac \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BH}\begin{pmatrix} x-b \\ y-\frac{1}{b} \end{pmatrix}$.

Or $\vec{u}.\vec{BH}=0 \iff xx'+yy'=0 \iff ac(x-b)+(-1)\times\left(y-\frac{1}{b}\right)=0$

$\iff acx-abc-y+\frac{1}{b}=0$

$\iff acx-y=abc-\frac{1}{b}$. équa° cartésienne de (BH).

c) De m̂, la hauteur issue de C du triangle ABC est : $abx-y=abc-\frac{1}{c}$.

d) Soit h_B la hauteur issue de B.

Soit h_C la hauteur issue de C.

$H(x;y)\in h_B\cap h_C$ donc :

$$\begin{cases} acx-y=abc-\frac{1}{b} \\ abx-y=abc-\frac{1}{c} \end{cases} \underset{L_1-L_2}{\iff} acx-y-(abx-y)=abc-\frac{1}{b}-\left(abc-\frac{1}{c}\right)$$

$acx - y - abx + y = abc - \frac{1}{b} - abc + \frac{1}{c}$

$acx - abx = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$

$x(ac - ab) = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$

$x \times a(c-b) = \frac{b}{bc} - \frac{c}{bc} = \frac{b-c}{bc}$

Or $a \neq 0$ et $c - b \neq 0$ car B et C sont des points distincts de $\mathcal{H}$

Donc : $x = \dfrac{\frac{b-c}{bc}}{a(c-b)} = \dfrac{b-c}{bca(c-b)} = \dfrac{-(c-b)}{abc(c-b} = \dfrac{-1}{abc}$.

Enfin : avec L_1 : $y = acx - abc + \frac{1}{b}$

Or $x = \frac{-1}{abc}$ donc $y = ac \times \frac{(-1)}{abc} - abc + \frac{1}{b}$

$y = \frac{-1}{b} - abc + \frac{1}{b}$.

Conclusion : $H\left(\frac{-1}{abc} ; -abc\right)$

Donc $y_H = \frac{1}{x_H}$ donc $H \in \mathcal{H}$.